23.04.2012

Пусть G — расщепимая группа, полупростая, односвязная (не очень важно)

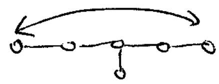
Что такое скрученная форма G как группы?

G' : $G'_{\bar F} \simeq G_{\bar F}$

Они параметризуются элементами $H^1(F, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{как алг. группы}}}{\mathrm{Aut}(G)})$

(Над замыканием центр $= \mu_n$
У скрученной формы центр = скрученная форма μ_n
$\mathrm{Aut}(\mu_n) = (\mathbb{Z}/n)^*$
Подгруппы μ_n имеют вид μ_m, $m \mid n$)

$$\mathrm{Aut}(G) = \underset{\substack{\parallel \\ G/\mathrm{Cent}(G)}}{G^{ad}} \rtimes \underset{\substack{| \\ \text{диаграмма Дынкина}}}{\mathrm{Aut}(D)}$$

Например, $\mathrm{Aut}(E_6^{sc}) = E_6^{ad} \rtimes \mathbb{Z}/2$ 

$\mathrm{Aut}(E_7^{sc}) = E_7^{ad}$

$\mathrm{Aut}(G_2) = G_2$ 

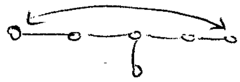
$\rightsquigarrow H^1(F, G^{ad} \rtimes \mathrm{Aut}(D))$ классифицирует скрученные формы G

$$H^1(F, G^{ad}) \longrightarrow H^1(F, G^{ad} \rtimes \mathrm{Aut}(D)) \longrightarrow H^1(F, \mathrm{Aut}(D))$$

— точная последовательность

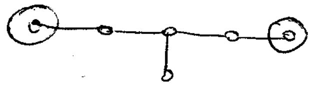
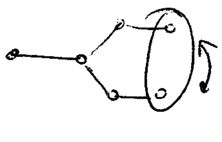
Те скрученные формы G, которые пришли из $H^1(F, G^{ad})$, называются внутренними формами

Что такое $H^1(F, \mathrm{Aut}(D))$?

По общей логике, это „скрученная форма D"
= действие группы Галуа на D как на графе
= $*$-действие  или 

Что такое индекс Титса?

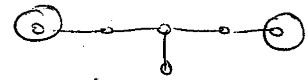
- D вместе с $*$-действием
- обведены $*$-орбиты, которые отвечают максимальным параболическим подгруппам, определенным над базой

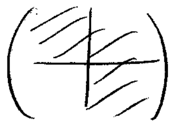
$\boxed{\text{Пример}}$  означает, что у ${}_\xi(E_6/P_1)$ и ${}_\xi(E_6/P_6)$ есть F-точка;  означает, что у ${}_\xi(E_6/P_{1,6})$ есть F-точка

__Теорема (Титс)__ G' определяется индексом Титса и __анизотропным ядром__

↑

Берем все обведенные орбиты. Это определяет некоторую параболическую подгруппу (определенную над базой). Берем коммутант ее подгруппы Леви. Это какая-то односвязная полупростая группа

Например, в случае  анизотропное ядро — скрученная форма $Spin_8(D_4)$. В этой ситуации можно сказать больше: это $Spin(q)$, где $q = \langle\langle a, b, c\rangle\rangle$ — Пфистерова квадр. форма.

 $\leq SL_{2n}$

Подгруппа Леви: $\{(g, h) \in GL_n \times GL_n \mid \det(g)\cdot\det(h) = 1\}$

Ее коммутант: $SL_n \times SL_n$

Анизотропная группа:

в индексе Титса нет обведенных орбит

$\Updownarrow$

не существует нетривиальных ($\neq G'$) параболических подгрупп, определенных над F

$\Updownarrow$

в G' нет подгруппы, изоморфной $\mathbb{G}_m$

$\boxed{\text{Замечание}}$ Над $\mathbb{R}$ анизотропная = „компактная форма"

$SL_n(\mathbb{R})$ не компактна

$SU_n(\mathbb{R})$

$\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i$ — эрмитова форма над $\mathbb{C}$

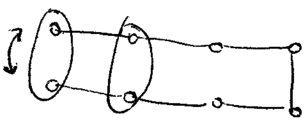
Ее изометрии — алг. группа над $\mathbb{R}$

Можно было взять p знаков „+" и q знаков „−", $p+q=n$

$\to SU_{p,q}(\mathbb{R})$, у нее анизотропное ядро — $SU_{\cancel{\max(p,q)}\; n-2\min(p,q)}(\mathbb{R})$

~~$\max(p,q) + \min(p,q) = p+q$~~

~~индекс Витта~~



Обводим min

Скрученная форма $SL_n / P_{1,n-1}$:

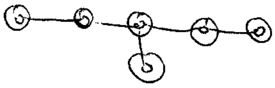
$\langle v\rangle \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ $\quad v^* \in {}^n\mathbb{C}$

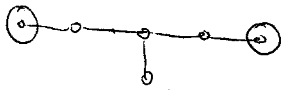
столбец $\quad$ строка

$\{v^* v = 0\}$ — многообразие, у которого нет рациональной точки, ибо $\sum \bar{x}_i x_i > 0$

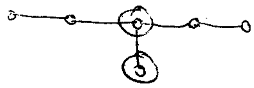
$\boxed{\text{Теорема}}$ Есть табличка, в которой написаны все возможные индексы Титса:

E_6, $*$-действие тривиально





D_4 — анизотропные ядра



$A_2 + A_2$

Над $\mathbb{R}$ существует только одна анизотропная (компактная) группа каждого типа (возможно, внешняя)

Opposition involution

$w_0 : w_0^2 = 1$

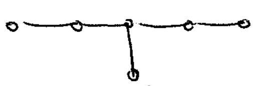
$w_0(\alpha_i) = -\alpha_{i^\circ}$, где $^\circ$ — инволюция диаграммы Дынкина

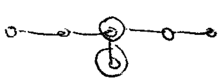
Она нетривиальна для A_n, E_6, D_{2n+1}, для остальных — тривиальна

Над $\mathbb{R}$ действие $c \in Gal(\mathbb{C}, \mathbb{R}) = \{1, c\}$ — это в точности действие opposition involution

Если $^\circ$ нетривиальна, то компактная форма внешняя

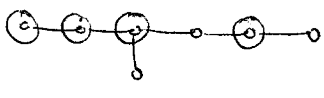
Например, для E_6 компактная форма имеет индекс Титса 

А такая картинка:  не реализуется

Такая:  тоже не реализуется

Любая картинка реализуется над $\mathbb{Q}(x, y)$

Еще пример с семинара:



Ее анизотропное ядро $= SL_1(\mathbb{H}) \times SL_1(\mathbb{H}) \times SL_1(\mathbb{H})$, где $\mathbb{H}$ — какие-то нетривиальные кватернионы над F

($SL_m(D)$ — скр. форма $SL_{m \cdot deg(D)}$)

Внутренняя форма: $\xi \in H^1(F, G^{ad})$.
Вопрос: когда ξ поднимается до $\zeta \in H^1(F, G^{sc})$?
Такие формы называются строго внутренними
(strongly inner)

$$1 \longrightarrow \mathrm{Cent}(G^{sc}) \longrightarrow G^{sc} \longrightarrow G^{ad} \longrightarrow 1$$

$$H^1(F, G^{sc}) \longrightarrow H^1(F, G^{ad}) \xrightarrow{\delta} H^2(F, \mathrm{Cent}(G^{sc}))$$

Ответ: поднимается, когда $\xi \longmapsto 0 \in H^2(F, \mathrm{Cent}(G^{sc}))$
Как описать это явно? Посмотрим на характер
$\lambda : \mathrm{Cent}(G^{sc}) \longrightarrow \mathbb{G}_m$

$$H^2(F, \mathrm{Cent}(G^{sc})) \xrightarrow{\lambda_*} H^2(\mathbb{F}, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(F)$$

$$\delta(\xi) = 0 \iff \forall \lambda \quad \underbrace{\lambda_* \delta(\xi)}_{\in \, \mathrm{Br}(F)} = 0$$

задается классом $[A]$ алгебры A

Эта алгебра называется <u>алгеброй Титса</u>, отвечающей характеру λ. Она центральная простая.

$P(\Phi)$ — решетка весов
$Q(\Phi)$ — решетка корней
Тогда $\lambda \longleftrightarrow$ элементы $P(\Phi)/Q(\Phi)$ — <u>коцентр</u>

$\boxed{\text{Утверждение}}$ $\{\varpi_1, \dots, \varpi_\ell\}$ — система образующих $P(\Phi)/Q(\Phi)$ (с избытком)
Достаточно брать те из них, которые соответствуют <u>минровесовым</u> представлениям
Рассмотрим ϖ_i как характер тора: $\varpi_i : T \longrightarrow \mathbb{G}_m$

$$\rightsquigarrow V(\varpi_i) = H^0(G/B, L_{\check{\varpi}_i})$$ — представление

Оно называется <u>минровесовым</u>, если W действует транзитивно на множестве весов.

$G \longrightarrow GL(V(\varpi_i))$ задает действие G^{ad} на проективизации $\mathbb{P}(V(\varpi_i))$ [illegible]

$\xi \in H^1(F, G^{ad}) \rightsquigarrow$ при помощи ξ можно все скрутить:
$G \rightsquigarrow G'$, $G^{ad} \rightsquigarrow (G')^{ad}$,
$\mathbb{P}(V(\varpi_i)) \rightsquigarrow$ скруч. форма $\mathbb{P}^{\dim V(\varpi_i) - 1} = SB(A)$ алгебра Титса

В частности, $\deg(A_{\bar{\omega}_i}) \mid \dim V(\omega_i)$

$\boxed{\text{Пример}}$ $SL_m(D) = G'$

$\rightsquigarrow$ алгебра Титса $= M_m(D)$

Класс ее в $Br(F)$ равен классу D.

$Aut(\mathbb{P}^n) = Aut(M_{n+1})$, поэтому A восстанавливается по $SB(A)$.