Напоминание

① $G = SL_1(A)$

$[A]$ $2[A]$ $3[A]$ $[A^{op}] = -[A]$

$\alpha_1 = 2\omega_1 - \omega_2$

$\leadsto$ по модулю решетки корней $\overline{\omega_2} = 2\overline{\omega_1}$

G_0 – соотв. расщепимая группа ; $V(\omega_i)$ – представление

$G_0^{ad} \curvearrowright \mathbb{P}(V(\omega_i))$

Все скручиваем $\xi \in H^1(F, G_0^{ad})$

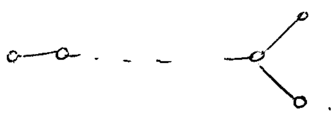
$\leadsto$ G^{ad} действует на скрученной форме проективного пространства т.е. на $SB(E_i)$, E_i – центральная простая.

E_i — i-я алгебра Титса

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow G_0^{sc} \longrightarrow G_0^{ad} \longrightarrow 1$$

$$H^1(F, G_0^{sc}) \longrightarrow H^1(F, G_0^{ad}) \longrightarrow H^2(F, C) \longrightarrow H^2(F, \mathbb{G}_m) = Br(F) \ni [E_i]$$

$\omega_i : C \longrightarrow \mathbb{G}_m$ – зависит только от класса ω_i по модулю решетки корней

② 

Алгебра Клиффорда

$$(V, q) \leadsto T(V) / (v \otimes v - q(v) \cdot 1) = C(q)$$

$C_0(q)$ – четная часть

$disc(q) \leadsto L/F$ – либо поле, либо $F \times F$

Если L – поле, то ортогональная группа внешнего типа

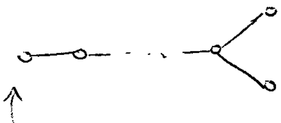
Если $L = F \times F$ — внутреннего типа

$C_0(q)$ – центральная простая алгебра над L

$Cent(C_0(q)) = 1, e_1 \dots e_{2n}$ — какой-то ортогональный базис.

Для группы внешнего типа тоже можно определить алгебры Титса – центральные простые над расширениями, соответствующими орбитам

Для группы внутреннего типа $L = F \times F$ и $C_0(q) = C_0^+(q) \times C_0^-(q)$ — ц.п.а. над F



$C_0^+(q)$ $\quad \Lambda^*(V) = \begin{pmatrix} C_0^+ & C_1^? \\ C_1^? & C_0^- \end{pmatrix}$

$C_0^-(q)$

если у нас просто квадр. форма, то эта $[E_1] = 0$

В общем виде: пусть D/F — центральная простая алгебра, на ней надо зафиксировать инволюцию ортогонального типа

На $M_n(F)$ все F-линейные инволюции выглядят так:

h — билинейная форма, $\rightsquigarrow h(\sigma(g)u, v) = h(u, gv)$

Для того, чтобы это было инволюцией, h должна быть $\underset{\text{ортогонального типа}}{\text{симметрической}}$ или $\underset{\text{симплектического типа}}{\text{антисимметрической}}$

(над $\bar{F}$ D превращается в $M_n(\bar{F})$, а тип сохраняется)

Любая группа типа D_n — $\mathrm{aut}(D, \sigma)$

Если $D = M_m(E)$, то задать σ (с точностью до скаляра) $=$ задать τ на E и эрмитову форму на E^m

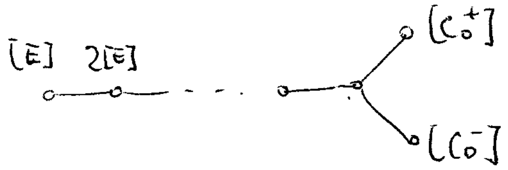
τ тоже ортогонального типа

„Морита-эквивалентность для инволюций"

$=$ задать τ' на E (симплектического типа) и антиэрмитову форму на E^m.

Особенно удобно, когда E — кватернионы (стандартная инволюция на кватернионах — симплектического типа)

Можно определить $C_0(D, \sigma)$ (но не C!)

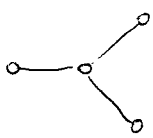


+ выполнено <u>фундаментальное соотношение</u> (fundamental relation)

Если n четно, то $[E] = [C_0^+] + [C_0^-]$

Если n нечетно, то $[E] = 2[C_0^+]$, $[C_0^-] = -[C_0^+]$

Тройственность:



Центральная простая алгебра степени 8 с инволюцией ортогонального типа

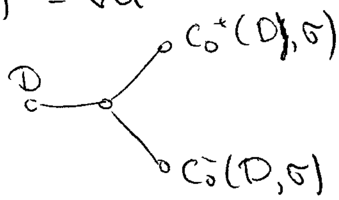
Но в качестве первой можно рассмотреть любую из трех вершин

На $C_0(q)$ есть инволюция

$(uv)^* = vu$

$C_0(q) \to C_0(q)^{op}$ — из универсального свойства

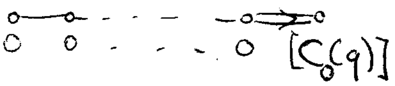
$u^2 = q(u)$



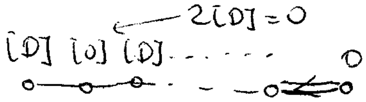
$\mathrm{aut}(C_0^+(D, \sigma), *) = \mathrm{aut}(D, \sigma)$

Более того, D можно восстановить как алгебру Клиффорда

B_n



C_n



$Aut(D,\sigma)$, σ — инволюция симплектического типа

D — центральная простая над L, $[L:F]=2$

σ — инволюция на D: $\sigma(L)=L$, $\sigma|_L \neq id_L$

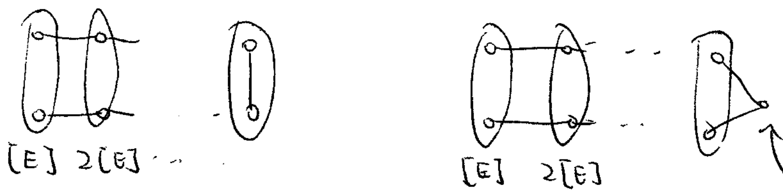
Тогда σ называется инволюцией второго рода

$Aut(D,\sigma)$ — внешняя группа типа A_n

Если $D = M_m(E)$, то по Морита-эквивалентности можно взять эрмитовы формы на E^n

$E = F \to$ обычная унитарная группа

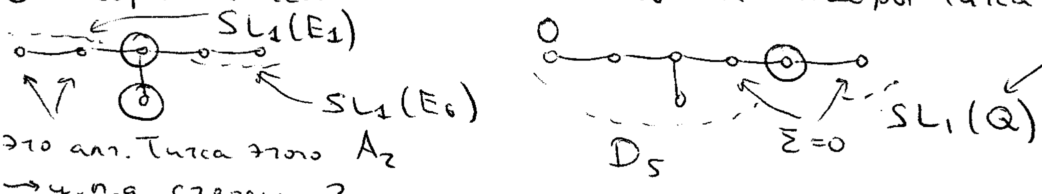
n — четно: n — нечетно:



центральная простая алгебра над F
= дискриминант эрмитовой формы.

Пусть группа изотропна.

Алгебры Титса можно посчитать как алгебры Титса анизотропного ядра



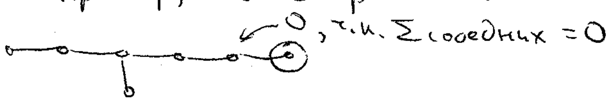
$\to D_5$ отвечает 10-мерной квадратичной форме, у которой $[C_0^+(q)] = [Q]$

Теорема Для схем с простыми связями; группа внутреннего типа: если обведена вершина, то
1) ее собственная алг. Титса $=0$
2) Σ алгебр Титса ее соседей $=0$

— Она работает и в обратную сторону: пусть мы придумали H, тип как у анизотропного ядра, и алгебры Титса подчиняются этому соотношению.

Тогда H — действительно анизотропное ядро какой-то изотропной группы

Например, E_6 с тривиальной алгеброй Титса вкладывается в E_7



L/F, D — степени 3 над L
$\to$ инволюция второго типа на D

$GL_n \curvearrowright V$

$PGL_n \curvearrowright End(V)$

E_7 — автотопии Брауновых алгебр $\to$ 56-мерное

E_7^{ad} — в терминах алг. с инволюциями степени 56