Йордановы пары

$H_n(\mathbb{C}) = \{a \mid a^* = a\}$

векторное пространство над $\mathbb{R}$

$(ab)^* = b^*a^* = ba$

$(aba)^* = a^*b^*a^* = aba$

$M_{p,q} \ni a \qquad M_{q,p} \ni b \qquad p+q=n$

$aba \in M_{p,q}$

$bab \in M_{q,p}$

$V = (V_+, V_-)$

$Q_+ : V_+ \times V_- \longrightarrow V_+$

$\forall a \in V_+ \quad Q_+(a)$ — линейное из V_- в V_+

а по аргументу a $Q_+(a)$ квадратично

$(Q_+(a+c) - Q_+(a) - Q_+(c))(b) =: \{a, b, c\}$

трилинейна

$Q_- : V_- \times V_+ \longrightarrow V_-$

$\boxed{Q_+(\lambda a) = \lambda^2 Q_+(a)}$

$Q_\pm(a) =: Q_a$

аксиомы йордановой пары

1. $\{x, y, Q_x z\} = Q_x\{y, x, z\}$
2. $\{Q_x y, y, z\} = \{x, Q_y x, z\}$
3. $Q_{Q_x y} = Q_x \circ Q_y \circ Q_x$

$(aba)c(aba) = a(b(aca)b)a$

Пример: $V_+ = M_{p,q}$, $V_- = M_{q,p}$ $\quad Q_x(y) = xyx$

$\{x, y, z\} = xyz + zyx$

Теперь предполагаем, что $\operatorname{char} F \neq 2$

L — 3-градуированная алгебра Ли:

$L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$ (на самом деле это $\mathbb{Z}$-градуировка)

L_1, L_{-1} — абелевы

Изготовим из L йорданову пару:

$V_+ = L_1$, $V_- = L_{-1}$, $Q_a(b) = \frac{1}{2}[a,[a,b]]$

$$a*b=\frac{1}{2}(ab+ba)$$

$$a*(a*b)=\frac{1}{4}\big(a(ab+ba)+(ab+ba)a\big)$$

$$a^2b+2aba+ba^2$$

$$(a*a)*b$$

$$\rightsquigarrow Q_a b = 2a*(a*b)-(a*a)*b$$

Ottmar Loos
„Jordan pairs"
„Симметрич. пространства"
„On algebraic groups defined by Jordan pairs"
„Homogeneous algebraic varieties defined by Jordan pairs"

$G \curvearrowright X$ — G-торсор
$x/y \in G$
$xy^{-1}z \rightsquigarrow$ тернарная операция

— как аксиоматизировать торсор без знания группы G

Наоборот, если $V=(V_+,V_-)$ — йорданова пара

$V_-\oplus \mathrm{Der}(V)\oplus V_+$. Что такое $\mathrm{Der}(V)$?

$\mathrm{Aut}(V)=\{(g_+,g_-)\in GL(V_+)\times GL(V_-)$, сохр. операции$\}$

это функтор:

$\mathrm{Aut}(V)(R)=\{\ \dots\ V_+\otimes R\ \ V_-\otimes R\ \dots\ \}$

$\mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(V)=:\mathrm{Der}(V)$
└ алгебра Ли

Понятно, как $\mathrm{Der}(V)$ действует на V_+ и на V_-

Осталось понять, что $[V_+,V_-]\subseteq \mathrm{Der}(V)$

$\mathrm{Der}(V)$ действует на V_+ и на V_-

$$[\underset{V_+}{a},\underset{V_-}{b}] \longrightarrow \left.\begin{array}{l}\{a,b,*\} \text{ на } V_+\\ \{*,a,b\} \text{ на } V_-\end{array}\right\}?$$

В char $\neq 2$ любая йорданова пара получается из 3-градуированной алгебры Ли. Существует теория йордановых пар, „параллельная" теории алгебр Ли и теории ассоциативных алгебр:

- Идеал (то, по чему можно факторизовать)
- Радикал (Джекобсона)
- Простые, полупростые
- Теорема классификации

} в любой характеристике

$G \qquad \mathbb{G}_m \leq G \rightsquigarrow P, U, L, U^-$

Рассмотрим случай: U — абелева группа

$\mathrm{Lie}\, G = \mathrm{Lie}\, U^- \oplus \mathrm{Lie}\, L \oplus \mathrm{Lie}\, U^+$ — 3-градуировка

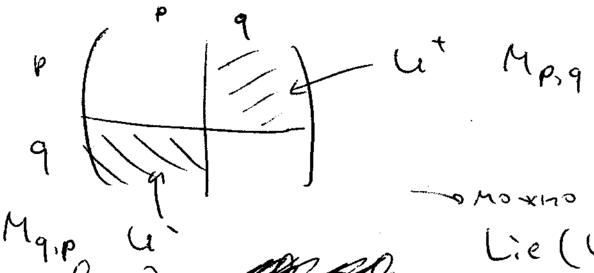
$\rightsquigarrow$ на $(\mathrm{Lie}\, U^+, \mathrm{Lie}\, U^-)$ возникает структура йордановой пары

Другой подход: — это работает только если $\mathrm{char}\, F \neq 2$

$U^- \times L \times U^+$ — подмногообразие в G — открытое (даже главное открытое)

Большая клетка ~~[illegible]~~ $P w_0 P$

$\boxed{\text{Пример}}$ GL_n



$\rightarrow$ можно отождествить $\mathrm{Lie}(U^+)$ с $U^+ = V^+$

$x \in U^+$, $y \in U^-$ $\rightsquigarrow$ почти всегда ~~[illegible]~~

$$xy = \underset{\underset{U^-}{\uparrow}}{y^x} \cdot \underset{\underset{L}{\uparrow}}{b(x,y)} \cdot \underset{\underset{U^+}{\uparrow}}{x^y}$$

Здесь x^y — частично определенная операция

$x^{\varepsilon y}$ — всюду определена, т.к. $x^0 = 1$

$\phantom{x^{\varepsilon y}} \| $

$\varepsilon \cdot Q_x y$ — определение $Q_x y$

Обратно, если мы знаем $Q_x y$, то можно восстановить частично определенные операции

$$B(x,y)z = z - \{x,y,z\} + Q_x Q_y z \in \mathrm{End}(V^+)$$

Условие, что x и y можно переставить, означает, что $B(x,y)$ обратим. Большая клетка задается уравнением: $\det(B(x,y))$ обратим. Тогда

$$x^y = B(x,y)^{-1}(x - Q_x y)$$

$b(x,y) \in L$; он задается своим действием на U^+ и U^-

$$b(x,y) \cdot z = B(x,y)z, \quad z \in U^+$$

$$b(x,y) \cdot w = B(y,x)^{-1} w, \quad w \in U^-$$

$\boxed{\text{Замечание}}$ Может случиться (и случается), что $\det B(x,y) = N(x,y)^k$; N — норма йордановой пары

$\rightsquigarrow$ можно задать алгебраическую группу (и по т. Вейля — группу)

Это дает альтернативную конструкцию простых алгебраических групп, кроме G_2, F_4 и E_8

Теорема классификации

Простые йордановы пары над F $\longleftrightarrow$ простые присоединенные алгебраические группы над F с фиксированным $\mathbb{G}_m$: U^+ абелев

$\uparrow$ эквивалентность категорий, если морфизмы — изоморфизмы

Следствие $\mathrm{Aut}(U^+, U^-)$ = автоморфизмы G, которые коммутируют с присоединенным действием $\mathbb{G}_m$

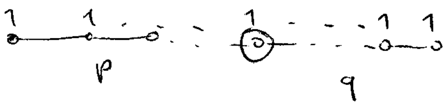
$\wr\wr$ примерно

$\mathrm{Cent}(\mathbb{G}_m) = L$

(на самом деле, либо L, либо $L \rtimes \mathbb{Z}/2$)

Графически можно увидеть абелевость U^+ так: берем старший корень, раскладываем в комбинацию простых. Позиции, в которых коэффициент $= 1$ $\longleftrightarrow$ параболические с абелевым унипотентным радикалом

над $\overline{F}$:

A_n: 

$(M_{p,q}, M_{q,p})$, операция по умолчанию xyx

B_n: 

(V, V) $\quad q: V \longrightarrow F$ — $\dim V$ нечетна

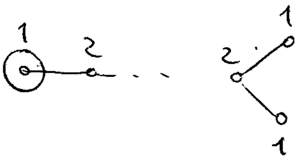
поляризация q

$Q_x y = q(x,y)x - q(x)y$

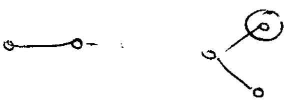
C_n: 

$(H_n(F), H_n(F))$

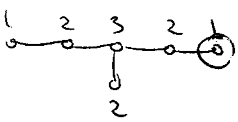
$\uparrow$ симметричные

D_n: 

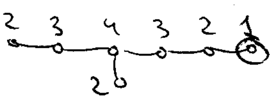
— так же, как в B_n, только $\dim V$ четна


$(A_n(F), A_n(F))$

$\uparrow$ кососимметричные матрицы

E_6: 

$(M_{1,2}(\mathbb{O}), M_{2,1}(\mathbb{O}))$

E_7: 

$(H_3(\mathbb{O}), H_3(\mathbb{O}))$

$\uparrow$ 27-мерная

$(x, y) \longmapsto (tx, t^{-1}y)$ — автоморфизм пары