$\boxed{17.02.2014}$

А.Л.Смирнов

1. <u>Гипотеза Морделла</u> (т. Фалтингса)

X — алг. кривая $/K$, K — числовое поле, $[K:\mathbb{Q}]<\infty$

$x^5+y^5=1$, $K=\mathbb{Q}$ ← пример

$g(X)$ — род кривой: $g=0,1,2,\ldots$

a) X „компактное" ($X(\mathbb{C})$ компактно)

b) X гладкая

Род = число ручек $X(\mathbb{C})$

Если $g\geq 2$, то $X(K)$ конечно ← гипотеза

2. <u>Гипотеза Тейта</u> (т. Фалтингса)

A, B — абелевы многообразия над K, ℓ — простое число

$V_\ell(A)$ — вект. пр-во над $\mathbb{Q}_\ell$

$\mathcal{G}=\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$

$$\mathrm{Hom}(A,B)\otimes\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(V_\ell(A),V_\ell(B))$$ ← гипотеза

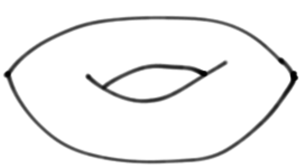
$$V_\ell(A)=T_\ell(A)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$$

$V_\ell(A)$ ↑ модуль Вейля; $T_\ell(A)$ ↑ модуль Тейта

$$T_\ell(A)=\varprojlim_n A(\overline{K})_{\ell^n} = \mathbb{Z}_\ell^{2g}$$

$$A_{\ell^3}\xrightarrow{\cdot\ell}A_{\ell^2}\xrightarrow{\cdot\ell}A_\ell$$

Одномерное абелево = эллипт. кривая: $\mathbb{C}/\Gamma$



$S^1\times S^1$

$$A(\mathbb{C})=(S^1)^{2g}$$

$$(S^1)_n\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightsquigarrow A_{\ell^n}\cong(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$$

$\rightsquigarrow V_\ell(A) \cong \mathbb{Q}_\ell^{2g}$

$\chi = -2$

Вместо $T_\ell(A)$ хочется написать $H_1(A, \mathbb{Z})$

$H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}$ – так мы потеряем действие $\mathcal{G}$

$\rightsquigarrow$ нужны ℓ-адические когомологии

3. Гипотезы Шафаревича (конгресс в Стокгольме)
(две штуки)
– аналоги двух теорем:

① Теорема Эрмита

② Теорема Минковского

Теорема Эрмита (~1857) K – числовое поле; d_K – дискриминант
целое число

(нам важен только $|d_K|$)

C – константа, $C > 0$ $(C \in \mathbb{R})$

Существует лишь конечное число K т.ч. $d_K \leqslant C$

Теорема Минковского (~1891)

Если $K \neq \mathbb{Q}$, то $d_K > 1$

$\mathbb{Z} \longleftrightarrow X = \mathbb{F}_q[t]$

не компактная

$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\mathbb{A}^1 / \mathbb{F}_q$

2 3 5 7 11 ...

$\overline{X} = \mathbb{P}^1$, $g = 0$

$g(\overline{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}) = ?$