Исчисление корневых элементов для изотропных редуктивных групп

Анастасия Ставрова

Январь 2015

Содержание

1 Прелиминарии: топологии Гротендика

Материал этого раздела взят из [FGIKNV06].

Определение 1.1. Пусть $\mathcal{C}$ — категория. **Топология Гротендика** τ на $\mathcal{C}$ — это задание для каждого $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ набора покрытий $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ (где I — множество) такого, что

1. если $V \to U$ — изоморфизм, то $\{V \to U\}$ — покрытие;
2. для любого покрытия $\{U_i \to U\}$ и для любого $V \to U$ существуют произведения $U_i \times_U V$ и $\{U_i \times_U V \to V$ — покрытие.
3. если $\{U_i \to U\}$, $\{V_{ij} \to U_i\}$ — покрытия, то $\{V_{ij} \to U_i \to U\}$ — покрытие.

Пару $(\mathcal{C}, \tau)$ еще называют **ситусом**.

Отметим, что в SGA4 это называют «предтопологией».

Пример 1.2. Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{C}$ — категория открытых множеств $U \subseteq X$ с включениями в качестве морфизмов; τ — обычные покрытия. Заметим, что здесь $U_i \times_U V = U_i \cap V$.

Пример 1.3. Пусть $\mathcal{C}$ — категория топологических пространств. Набор $\{U_i \to U\}$ назовем покрытием, если $\bigcup f_i(U_i) = U$ и все f_i — открытые вложения (то есть, инъективные открытые непрерывные отображения).

Условие про объединение образов очень естественно, поэтому нам будет удобно пользоваться следующим определением.

Определение 1.4. Набор $\{f_i : U_i \to U$ называется **совместно сюръективным** (**jointly surjective**), если $\bigcup_i f_i(U_i) = U$.

Приведем теперь примеры топологий на категории схем. Пусть S — схема (например, $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, $\operatorname{Spec} k$, где k — поле, или $\operatorname{Spec} R$, где R — произвольное коммутативное кольцо). Рассмотрим категорию $\mathcal{C} = \mathrm{Sch}/S$ схем над S.

Пример 1.5. Пусть $\{U_i \to U\}$ — покрытие, если это совместно сюръективный набор открытых вложений. Получим **топологию Зариского** на Sch/S (мы будем обозначать ее через Zar).

Напомним, что открытое вложение локально выглядит как отображение из кольца в его локализацию.

Пример 1.6. Пусть $\{f_i : U_i \to U\}$ — покрытие, если это набор совместно сюръективных этальных и локально конечно представимых морфизмов.

Определение 1.7. Морфизм $f : X \to Y$ **локально конечно представим**, если локально в топологии Зариского он выглядит как $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$, где B/A — *конечно представимая алгебра*, то есть, $B \cong A[x_1, \dots, x_n]/I$ для конечно порожденного идеала I.

Везде, произнося слово «локально» без явного указания топологии, мы подразумеваем «локально в топологии Зариского».

Пусть k, k' — поля, $\operatorname{Spec} k' \to \operatorname{Spec} k$ — морфизм. Тогда он является этальным покрытием, если k'/k — конечное сепарабельное расширение.

Пример 1.8 (fpqc-топология)**.** Назовем набор $\{U_i \to U\}$ покрытием, если это совместно сюръективный набор морфизмов такой, что $\coprod U_i \to U$ является строго плоским морфизмом, и существует открытое покрытие U аффинными подсхемами $\operatorname{Spec} A$ и квази-компактные открытые $V \subseteq \coprod U_i$ такие, что $f(V) = \operatorname{Spec} A$.

Замечание 1.9. Напомним, что топологическое пространство называется **квази-компактным**, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Любая аффинная схема квази-компактна. Поэтому схема квази-компактна тогда и только тогда, когда она покрывается конечным числом аффинным.

Имеют место включения

$$\mathrm{Zar} \subseteq \mathrm{Nis} \subseteq \text{ét} \subseteq \mathrm{fppf} \subseteq \mathrm{fpqc}$$

(мы не знаем, что такое топология Нисневича Nis и fppf-топология, но это не страшно).

Замечание 1.10. Морфизм спектров полей $\operatorname{Spec} k' \to \operatorname{Spec} k$ всегда является fpqc-покрытием.

Определение 1.11. Пусть $\mathcal{C}$ — ситус. Контравариантный функтор $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$ называется **предпучком**. Предпучок F называется **отделимым**, если отображение $F(U) \to \prod F(U_i)$ инъективно для любого покрытия $\{U_i \to U\}$. Предпучок F называется **пучком**, если диаграмма

$$F(U) \longrightarrow \textstyle\prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j)$$

является уравнителем.

Напомним, что отображение $f_i\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ называется **строго плоским морфизмом**, если

1. f сюръективно («строгость»);

2. f плоский, то есть, модуль B является плоским A-модулем.

Например, проективный модуль является плоским.

Следующая теорема утверждает, что все введенные нами топологии на Sch/S являются субканоническими.

Теорема 1.12 (Гротендик)**.** Для любой схемы X/S **представимый функтор** $\mathrm{Sch}/S \to \mathrm{Sets}$, $A \mapsto X(A) = \operatorname{Hom}_S(A, X)$ является пучком в топологии fpqc (а потому и в Zar, ét, ...).

Лемма 1.13. Пусть $F\colon \mathrm{Sch}/S \to \mathrm{Sets}$ — предпучок, и для любой строго плоской алгебры B/A диаграмма

$$F(A) \longrightarrow F(B) \rightrightarrows F(B \otimes_A B)$$

является уравнителем. Тогда F — пучок.

Примеры 1.14.

1. Пусть G — группа Шевалле, R — коммутативное кольцо. Известно, что G задает функтор $R\text{-alg} \to \mathrm{Groups}$, $A \mapsto G(A)$ (*функтор точек*). Тогда G — пучок в fpqc.

2. Функтор элементарной подгруппы

$$\begin{aligned} E\colon R\text{-alg} &\to \mathrm{Groups}, \\ A &\mapsto E(A) = \langle x_\alpha(\xi) \mid \alpha \in \Phi, \xi \in A\rangle \end{aligned}$$

является отделимым предпучком. Однако, это не пучок ни в одной из наших топологий. Покажем, что это не пучок в топологии fpqc. Пусть $k \to \overline{k}$ — вложение поля в его алгебраическое замыкание. Тогда $\operatorname{Spec}\overline{k} \to \operatorname{Spec} k$ — покрытие в топологии fpqc. Пусть $G = G^{\mathrm{ad}}$ — присоединенная группа. Тогда известно, что $E(\overline{k}) = G(\overline{k})$, $E(k) \neq G(k)$. Диаграмма из определения пучка превращается в

$$E(k) \longrightarrow E(\overline{k}) \rightrightarrows E(\overline{k} \otimes_k \overline{k})$$

Заметим, что

$$E(\overline{k} \otimes_k \overline{k}) = G(\overline{k} \otimes_k \overline{k}) = G(\prod_{i \in \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)} (\overline{k})_i) = \prod_{i \in \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)} G((\overline{k})_i).$$

Кроме того, $G(\overline{k}) = E(\overline{k})$. Из этого бы следовало, что $G(k) = E(k)$, а мы знаем, что это не так.

3. Пусть $\operatorname{rk} G \geq 2$, тогда $K_1^G(-) = G(-)/E(-)\colon R\text{-alg} \to \mathrm{Groups}$ — предпучок, но не отделимый. Мы знаем, что $K_1^G(\overline{k}) = 1$, но $K_1^G(k) \neq 1$ для $G = G^{\mathrm{ad}}$. Зато $\mathrm{NK}_1^G(A) = \ker(K_1^G(A[x]) \to K_1^G(A))$ (где $x \mapsto 0$) отделим в топологии Зариского, так как $\mathrm{NK}_1^G(A) \to \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)} \mathrm{NK}_1^G(A_{\mathfrak{m}})$ инъективно (лемма Квиллена–Суслина).

4. Большая клетка $\Omega = U^+LU^-$, параболическая подгруппа $P^+ = P$ — все это подпучки в G.

5. Пусть M — конечно порожденный проективный модуль над кольцом R. Он индуцирует функтор $M\colon R\text{-alg} \to \mathrm{Ab}$, $A \mapsto M_A = A \otimes_R M$, который является пучком в топологии fpqc. На самом деле, это еще и *представимый* функтор, то есть, M соответствует схеме $W(M)$ над R. А именно, $W(M) = \operatorname{Spec}\operatorname{Sym}^\bullet(M^*)$, где $M^* = \mathrm{Hom}_{R-mod}(M, R)$. Грубо говоря, это просто многочлены от линейных функций на M.

Как мы будем применять введенные понятия? Есть два основных use-case'а.

1. Некоторые факты достаточно проверять «локально в топологии τ». Что это значит? Например, пусть $g \in G(R)$, и мы хотим проверить, что $g \in P^+(R)$. Для этого достаточно проверить, что «$g \in P^+(R)$ локально в топологии fpqc».

   Еще пример: пусть $M_1 \subseteq M_2$ — конечно порожденные проективные R-модули. Тогда $M_1 = M_2$ равносильно тому, что «$M_1 = M_2$ локально в топологии fpqc (Zar)».

   Неформальные утверждения в кавычках означают, что существует покрытие $\{U_i \to U\}$ (или, для аффинных схем, $\{R \to B_i\}$) такое, что $g \in P^+(B_i)$ (или, $M_1 \otimes_R B_i = M_2 \otimes_R B_i$, соответственно).

2. Некоторые объекты «строятся спуском в топологии τ», или «строятся локально в топологии τ».

   Например, пусть G — алгебраическая группа над полем k. Как доказывается, что у нее есть унипотентный радикал $R_u(G)$? Доказывается, что он есть над $\overline{k}$ и $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-инвариантен. (Для тех, кто знает, что такое строго плоский спуск, напомним, что спускаются только аффинные морфизмы)

Теорема 1.15 ([FGIKNV06, Cor. 4.34])**.** Пусть $X \to S$ — морфизм схем, $\{S_i \to S\}$ — fpqc-морфизм. Обозначим $X_i = X \times_S S_i$, $X_{ij} = X \times_S S_i \times_S S_j$. Пусть для любого i дана замкнутая S-подсхема $P_i \subseteq X_i$ так, что $P_i \times_{X_i} X_{ij} = P_j \times_{X_j} X_{ij}$ для всех i, j. Тогда существует единственная замкнутая S-подсхема $P \subseteq X$ такая, что $P_i \cong P \times_S S_i$ для всех i.

2 Расщепимые редуктивные группы: pinnings, параболические подгруппы, модули Шевалле

Определение 2.1. Пусть G/R — групповая схема, тогда G называется *расщепимой редуктивной группой*, если $G \cong (H \times S)/C$, где H — односвязная группа Шевалле, $S \cong (\mathbb{G}_m)^n$ — расщепимый тор, $C \leq H \times S$ — центральная подгруппа.

Определение 2.2. *Корневые данные* $(M, M^\vee, \Phi, \Phi^\vee)$ — это два свободных двойственных $\mathbb{Z}$-модуля M и $M^\vee$, $\langle,\rangle\colon M^\vee \times M \to \mathbb{Z}$ — спаривание. и подмножества $\Phi \subseteq M$, $\Phi^\vee \subseteq M^\vee$ с биекцией $\Phi \to \Phi^\vee$, $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ такие, что

- $\langle \alpha^\vee, \alpha\rangle = 2$ для всех $\alpha \in \Phi$;
- $w_\alpha(\Phi) = \Phi$, $w_{\alpha^\vee}(\Phi^\vee) = \Phi^\vee$ для всех α, где $w_\alpha(x) = x - \langle\alpha^\vee, x\rangle\alpha$, $w_{\alpha^\vee}(x) = x - \langle x, \alpha\rangle\alpha^\vee$.

При этом Φ является системой корней в $V = (\mathbb{Z}\Phi) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ относительно скалярного произведения $(\alpha, \beta) = \langle\alpha^\vee, \beta\rangle$, а $\Phi^\vee$ — двойственная система.

Определение 2.3. Пусть G/R — расщепимая редуктивная группа, тогда *оснащение* (=pinning, épinglage) в G над R — это

1. $T \subseteq G$ — расщепимый максимальный тор;

2. корневые данные G $(M, M', \Phi, \Phi^\vee)$ с изоморфизмом $\mathbb{Z}$-модулей $M \cong X^*(T)$ и разложением $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(T) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathrm{Lie}(G)_\alpha$;

3. выбор системы простых корней $\Pi \subseteq \Phi$ и для любого $\alpha \in \Pi$ выбор замкнутого вложения $x_\alpha \colon \mathbb{G}_\alpha \to G$ такого, что $x_\alpha(G_\alpha) = U_\alpha \le G$, и $\mathrm{Lie}(U_\alpha) = \mathrm{Lie}(G)_\alpha$.

Оснащение G может быть продолжено до *системы Шевалле*: это набор замкнутых вложений $x_\alpha \colon \mathbb{G}_\alpha \to G$, $x_\alpha(\mathbb{G}_\alpha) = U_\alpha \subseteq G$ так, что для всех $\alpha, \beta \in \Phi$ и для любых R'/R (то есть, R' — коммутативная R-алгебра), $a \in (R')^*$, $b \in R'$, выполнено ${}^{w_\alpha(a)}x_\beta(b) = x_{w_\alpha(\beta)}(\eta_{\alpha\beta} a^{-\langle \beta^\vee, \alpha\rangle} b)$. Здесь $\eta_{\alpha\beta} = \pm 1$ — некоторые константы (для них есть формула). Напомним, что $w_\alpha(a) = x_\alpha(a) x_{-\alpha}(-a^{-1}) x_\alpha(a)$.

Из этого выводится

- коммутационная формула Шевалле;
- формула ${}^{h_\alpha(a)}x_\beta(b) = x_\beta(a^{\langle\beta^\vee,\alpha\rangle} b)$, где $h_\alpha(a) = w_\alpha(a) w_\alpha(1)^{-1}$.

Пусть G — расщепимая редуктивная группа над коммутативным кольцом R с оснащением T (то есть, выбраны M, M', Φ, $\Phi^\vee$, $\Pi \subseteq \Phi$, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Pi}$). Пусть $J \subseteq \Pi$ — произвольное подмножество. Рассмотрим множества $\Delta = \langle \alpha \mid \alpha \in \Pi \setminus J\rangle_{\mathbb{Z}} \cap \Phi$ и $\Sigma = \Phi^+ \setminus \Delta = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \sum_{\beta\in J} m_\beta(\alpha) > 0\}$.

Определение 2.4. Говорят, что $P = P_J$ — **стандартная параболическая подгруппа** типа J, если P — [единственная] гладкая замкнутая подгруппа в G такая, что $\mathrm{Lie}(P) = \bigoplus_{\alpha\in\Delta\cup\Sigma} \mathrm{Lie}(G)_\alpha$. Подмножество $\Delta \cup \Sigma$ мы будем обозначать через $\Phi(P)$.

Требование гладкости гарантирует, что на P выбрана редуцированная структура замкнутой подсхемы.

У параболической подгруппы есть **подгруппа Леви** L_P такая, что $\mathrm{Lie}(L_P) = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathrm{Lie}(G)_\alpha$. Также есть **унипотентный радикал** U_P: $U_P(R') = \langle x_\alpha(R') \mid \alpha \in \Sigma\rangle$ для каждой R-алгебры R'. Описать в аналогичном духе образующие $L_P(R')$ мы не можем, но по крайней мере $L_P(R')$ содержит $T(R')$ и $\langle x_\alpha(R') \mid \alpha \in \Delta\rangle$.

Определение 2.5. Каждому корню $\alpha \in \Phi$ сопоставим вектор $\alpha_J = \sum_{\beta\in J} m_\beta(\alpha)\beta$, называемый **шейпом** (**shape**) корня α. **Уровнем** корня α назовем число $\mathrm{level}(\alpha) = \sum_{\beta\in J} m_\beta(\alpha)$ (см. [ABS90]).

Напомним, что $x_\alpha(\mathbb{G}_a) = U_\alpha$ — замкнутая подгруппа в G.

Пусть S — шейп, то есть, $S = (\alpha_0)_J$ для некоторого $\alpha_0 \in \Phi$. Положим $\Sigma_S = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha_J = S\}$. Тогда $\Sigma = \coprod_{S\neq 0, S\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\cdot J} \Sigma_S$. Уровень каждого корня из Σ_S равен одному и тому же целому числу, которое мы будем называть **уровнем** шейпа S и обозначать через $\mathrm{level}(S)$.

Определение 2.6. Для шейпа S положим $V_S = \prod_{\alpha\in\Sigma_S} U_\alpha \subseteq U_P^i/U_P^{i+1}$, где $U_P = R_u(P_J)$, а $i = \mathrm{level}(S)$. Это подгруппа в абелевой группе U_P^i/U_P^{i+1}, а на самом деле, конечно,

$$U_P^i/U_P^{i+1} \cong W(R^{\sum_{\mathrm{level}(S)=i} |\Sigma_S|}),$$

и $V_S \cong W(R^{|\Sigma_S|})$. Такой модуль V_S называется **внутренним модулем Шевалле**. Это свободный модуль с действием L_P.

Лемма 2.7. Множество Σ_S содержит единственный корень $\alpha_S^{\max}$ максимальной высоты, и единственный корень $\alpha_S^{\min}$ минимальной высоты. Кроме того, для любых $m, n \ge 1$ выполнено $\alpha_{mS}^{\max} - \alpha_{nS}^{\max} \in \Phi \cup \{0\}$ (и то же самое выполнено для min).

Доказательство. Докажем для max. Заметим, что первая часть следует из второй подстановкой $m = n$. Разность $\alpha_{mS}^{\max} - \frac{m}{n}\alpha_{nS}^{\max}$ имеет нулевой шейп, поэтому представляется в виде (рациональной) линейной комбинации корней из $\Pi \setminus J$. Сгруппируем отдельно те корни из $\Pi \setminus J$, коэффициент при которых в этой разности положителен, и те, коэффициент при которых отрицателен. Итак,

$$\alpha^{\max}_{mS} = \frac{m}{n}\alpha^{\max}_{nS} + \sum_{\alpha_i \in I_+} \lambda_i \alpha_i - \sum_{\beta_j \in \ I_-} \mu_j \beta_j,$$

где $I_+, I_- \subseteq \Pi \setminus J$, $I_+ \cap I_- = \varnothing$, и все коэффициенты λ_i, μ_j неотрицательны. Обозначим $\delta_1 = \sum \lambda_i \alpha_i$, $\delta_2 = \frac{m}{n}\alpha^{\max}_{nS} - \sum_{\mu_j \beta_j}$. Заметим, что $(\delta_1, \delta_2) \geq 0$. Действительно, $\alpha^{\max}_{nS}$ — максимальный корень своего шейпа, поэтому $(\alpha^{\max}_{nS}, \alpha_i) \geq 0$; кроме того, $(\alpha_i, \beta_j) \leq 0$, поскольку это простые корни.

Поэтому $(\alpha^{\max}_{mS}, \delta_2) = (\delta_1 + \delta_2, \delta_2) > 0$. Отсюда

$$\frac{m}{n}(\alpha^{\max}_{mS}, \alpha^{\max}_{nS}) = (\alpha^{\max}_{mS}, \delta_2) + (\alpha^{\max}_{mS}, \sum \mu_j \beta_j),$$

где первое слагаемое положительно, а второе неотрицательно. Поэтому $\alpha^{\max}_{mS} - \alpha^{\max}_{nS} \in \Phi \cup \{0\}$. $\square$

Теорема 2.8 (из статьи [ABS90])**.** Пусть $R = K$ — поле, в котором не меньше пяти элементов, и структурные константы Φ обратимы. Пусть система корней Φ неприводима. Тогда $V_S(K)$ — неприводимый $L_P(K)$-модуль со старшим весом $-\alpha^{\min}_S$.

Лемма 2.9 ([ABS90, Lemma 1])**.** Группа $W(\Delta)$ действует транзитивно на корнях одинаковой длины в Σ_S для любого шейпа S по отношению к J.

3 Системы относительных корней

Пусть Φ — система корней, $\Pi \subseteq \Phi$ — простые корни, D — соответствующая диаграмма Дынкина, $J \subseteq \Pi$, $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(D)$, и пусть множество J инвариантно относительно Γ.

Определение 3.1. Рассмотрим отображение

$$\pi_{J,\Gamma} \colon \mathbb{Z}\Phi \to \mathbb{Z}\Phi / \langle \Pi \setminus J; \alpha - \sigma(\alpha) \mid \alpha \in J, \sigma \in \Gamma \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Множество $\Phi_{J,\Gamma} = \pi_{J,\Gamma}(\Phi) \setminus \{0\}$ называется **системой относительных корней**.

Случай 1: группа Γ тривиальна. Тогда $\pi_{J,1} \colon \mathbb{Z}\Phi \to \mathbb{Z}\Phi / \langle \Pi \setminus J \rangle_{\mathbb{Z}}$, и образы простых корней в $\Phi_{J,1}$ биективно соответствуют J, а $\pi_{J,1}(\Phi)$ биективно соответствует J-шейпам.

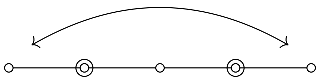
Случай 2: группа Γ нетривиальна. Если при этом Φ — неприводимая система корней, то $\Phi = \mathrm{A}_l$ $(l \geq 2)$, D_l $(l \geq 5)$, E_6 или D_4. При этом если $\Phi = \mathrm{A}_l$, D_l $(l \geq 5)$ или E_6, то обязательно $\Gamma = \{\mathrm{id}_D, \sigma\}$. В случае $\Phi = \mathrm{D}_4$ может быть $\Gamma = \{\mathrm{id}_D, \sigma\}$, $\Gamma = \{\mathrm{id}_D, \sigma, \sigma^2\}$ или $\Gamma \cong S_3$. В любом случае (даже для приводимой системы Φ) отображение $\pi_{J,\Gamma}$ можно разложить в композицию

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\Phi \arrow[rr, "\pi_{J,\Gamma}"] \arrow[dr, "\pi_\Gamma"'] & & Z\Phi / \langle \Pi \setminus J, \alpha - \sigma(\alpha) \mid \alpha \in J \rangle_{\mathbb{Z}} \\
& Z\Phi / \langle \alpha - \sigma(\alpha) \mid \alpha \in \Pi \rangle_{\mathbb{Z}} \arrow[ur, "\pi_{J',1}"'] &
\end{tikzcd}$$

где $J' = \pi_\Gamma(J)$.

При этом $\Phi' = \pi_\Gamma(\Phi) \setminus \{0\}$ всегда является системой корней (и для неприводимой Φ имеет тип $\mathrm{BC}_{l/2}$, $\mathrm{C}_{(l-1)/2}$ или G_2).

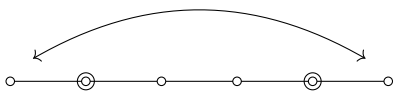
Пример 3.2. Пусть $\Phi = \mathrm{A}_5$, $J = \{\alpha_2, \alpha_4\}$, $\Gamma = \{\mathrm{id}, \sigma\}$. Мы будем обводить на диаграмме Дынкина вершины, соответствующие корням из J, и указывать стрелочками действие группы Γ:



Получаем отображения $\mathbb{Z}\,\mathrm{A}_5 \xrightarrow{\pi_\Gamma} \mathbb{Z}\,\mathrm{C}_3 \xrightarrow{\pi_{\alpha_2}} \mathbb{Z} \cdot \pi_{J,\Gamma}(\alpha_2) = \mathbb{Z}\Phi_{J,\Gamma}$. При этом $\Phi_{\{\alpha_2,\alpha_4\},\Gamma} = \pi_{\{\alpha_2,\alpha_4\},\Gamma}(A_5) \setminus \{0\}$.

Вывод: относительные корни всегда соответствуют ненулевым шейпам для какой-то системы корней.

Пример 3.3. В случае $\Phi = \mathrm{A}_6$, $J = \{\alpha_2, \alpha_5\}$ с нетривиальной Γ получаем $\Phi' = \mathrm{BC}_3$:



Под равенством $\Phi' = \mathrm{BC}_3$ мы здесь имеем в виду, что Φ' *изоморфна* BC_3 в смысле следующего определения.

Определение 3.4. Изоморфизм систем относительных корней — это биекция, сохраняющая [частично определенное] сложение.

Определение 3.5. Простые относительные корни — это элементы образа $\pi_{J,\Gamma}(\Pi) \setminus \{0\}$.

Очевидный факт: любой $\alpha \in \Phi_{J,\Gamma}$ является суммой $\alpha = \sum_{\beta_i \in \pi_{J,\Gamma}(\Pi)\setminus\{0\}} \lambda_i \beta_i$, где все коэффициенты $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ и либо одновременно неотрицательны, либо одновременно неположительны.

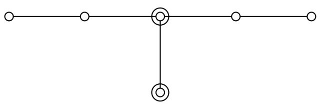
Введем обозначения: $\Phi^+_{J,\Gamma} = \pi_{J,\Gamma}(\Phi^+) \setminus \{0\}$, $\Phi^-_{J,\Gamma} = \pi_{J,\Gamma}(\Phi^-) \setminus \{0\}$. Тогда $\Phi_{J,\Gamma} = \Phi^+_{J,\Gamma} \coprod \Phi^-_{J,\Gamma}$.

Определение 3.6. Система относительных корней $\Phi_{J,\Gamma}$ называется **неприводимой**, если Γ действует транзитивно на неприводимых компонентах Φ.

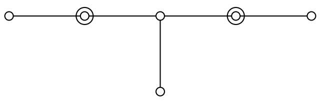
Определение 3.7. Будем говорить, что $\Phi_{J,\Gamma}$ — **система корней**, если $\Phi_{J,\Gamma}$ изоморфна системе корней в смысле Бурбаки.

Пример 3.8. Пусть $\Phi = \mathrm{A}_n$. Тогда $\Phi_{J,1} \cong \mathrm{A}_{|J|}$, и $\Phi_{J,\{\mathrm{id},\sigma\}} \cong \begin{cases} \mathrm{C}_l, & |J| \text{ нечетно}, l = \frac{|J|+1}{2} \\ \mathrm{BC}_l, & |J| \text{ четно}, l = \frac{|J|}{2} \end{cases}$

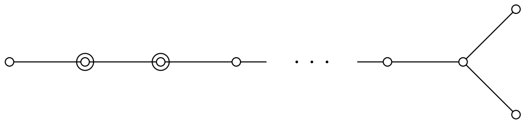
Пример 3.9. $\Phi = \mathrm{E}_6$, $J = \{\alpha_2, \alpha_4\}$ — получается относительная система корней типа G_2:



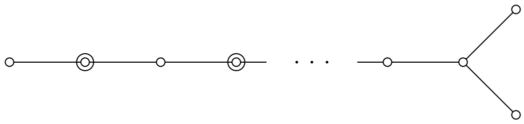
Угадать ответ в этом случае (и в некоторых других) помогает следующее соображение. Коэффициенты в разложении максимального корня E_6 по простым корням равны $\begin{smallmatrix}12321\\2\end{smallmatrix}$. Коэффициенты при вершинах из J оказались равны 3 и 2 — как и коэффициенты в разложении максимального корня системы типа G_2. Однако, это правило не всегда работает. Например, если $J = \{\alpha_3, \alpha_5\}$, то получится все-таки не система корней типа BC_2 (хотя коэффициенты при корнях из J равны 2 и 2):



Пример 3.10. Пусть $\Phi = D_l$. Если $J = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ — получается *не* BC_2, а $\{\pm\alpha_2, \pm\alpha_3, \pm(\alpha_2 + \alpha_3), \pm(\alpha_2 + 2\alpha_3), \pm(2\alpha_2 + 2\alpha_3)\}$ — это вообще не система корней:



Если же $J = \{\alpha_2, \alpha_4\}$, то все-таки BC_2:



Лемма 3.11. Пусть Φ — любая система корней, $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$ такие, что $\alpha + \beta + \gamma \in \Phi$ и $\alpha + \beta + \gamma \neq \alpha, \beta, \gamma$. Тогда хотя бы две суммы из $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$ являются корнями.

Доказательство этой леммы совсем несложно.

Лемма 3.12. Пусть $A, B, C \in \Phi_{J,\Gamma}$ удовлетворяет $A + B = C$. Тогда для любого $\gamma \in \pi_{J,\Gamma}^{-1}(C)$ существуют $\alpha \in \pi_{J,\Gamma}^{-1}(A)$ и $\beta \in \pi_{J,\Gamma}^{-1}(B)$ такие, что $\alpha + \beta = \gamma$.

Доказательство. Обозначим для краткости $\pi = \pi_{J,\Gamma}$. Пусть сначала $\Gamma = 1$. Пусть $\alpha_0 \in \pi^{-1}(A)$ и $\beta_0 \in \pi^{-1}(B)$ — любая пара корней. Тогда $\gamma = \alpha_0 + \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \delta_i$, где $\delta_i \in (\Pi \setminus J) \cup (-(\Pi \setminus J))$. Доказываем индукцией по n, что из этого следует существование α, β с суммой γ. При $n = 0$ все доказано. Пусть теперь $n > 0$. Из $(\gamma, \gamma) > 0$ следует, что $(\gamma, \alpha_0) > 0$ или $(\gamma, \beta_0) > 0$ или $(\gamma, \delta_i) > 0$ для какого-то i. Если $(\gamma, \alpha_0) > 0$ или $(\gamma, \beta_0) > 0$, то все доказано: берем разность. Если же $(\gamma, \delta_i) > 0$, то $\gamma' = \gamma - \delta_i$ является корнем. По предположению индукции тогда $\gamma' = \alpha' + \beta'$, где $\alpha' \in \pi^{-1}(A)$, $\beta' \in \pi^{-1}(B)$. Тогда $\alpha' + \beta' + \delta_i = \gamma$ — корень. По лемме 3.11 $\alpha' + \delta_i$ или $\beta' + \delta_i$ является корнем. Поэтому $\gamma = (\alpha' + \delta_i) + \beta'$ в первом случае, и что-то такое же во втором.

Теперь пусть $\Gamma \neq 1$. Тогда $\pi_{J,\Gamma}$ раскладывается в композицию

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\Phi \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{Z}\Phi_{J,\Gamma} \\
& \mathbb{Z}\Phi' = \mathbb{Z}\Phi / \langle \alpha - \sigma(\alpha) \mid \alpha \in \Pi, \sigma \in \Gamma \rangle \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

По условию $A + B = C$ в $\Phi_{J,\Gamma}$. Поэтому есть $A', B', C' \in \Phi_{\Pi,\Gamma} = \Phi'$ такие, что $A' + B' = C'$. Осталось доказать утверждение для первой стрелки. Теперь можно считать, что $J = \Pi$. Например, в случае $\Phi = A_l$ все орбиты действия $\Gamma = \{\mathrm{id}_D, \sigma\}$ состоят из одного или из двух элементов. Пусть $\alpha_0 \in \pi_{\Pi,\Gamma}^{-1}(A')$, $\beta_0 \in \pi_{\Pi,\Gamma}^{-1}(B')$. Тогда $\alpha_0 + \sigma(\alpha_0) + \beta_0 + \sigma(\beta_0) = \gamma + \sigma(\gamma)$. Дальше смотрим на скалярное произведение: $(\gamma + \sigma(\gamma), \gamma + \sigma(\gamma)) > 0$, поэтому $(\gamma, \alpha) > 0$ или $(\gamma, \beta) > 0$ или $(\gamma, \sigma(\alpha)) > 0$ или $(\gamma, \sigma(\beta)) > 0$. Общий случай рассматривается аналогично: нужно рассматривать суммы выражений вида $g(\alpha)$ по всем элементам $g \in \Gamma$. $\square$

Лемма 3.13. Для любого $A \in \Phi_{J,\Gamma}$ имеем $\mathbb{Z}A \cap \Phi_{J,\Gamma} = \{\pm A, \pm 2A, \dots, \pm mA\}$ для какого-то $m = m_A \geq 1$.

Доказательство. Если Γ тривиальна, то A является J-шейпом. По лемме 2.7 тогда $\alpha_{mS}^{\max} - \alpha_{nS}^{\min}$ лежит в Φ или равно нулю. Тогда $\alpha_{mS}^{\max} \in \pi^{-1}(mA)$ и $\alpha_{nS}^{\max} \in \pi^{-1}(nA)$. Если же $\Gamma \neq 1$, то A — это $\pi_{\Pi,\Gamma}(J)$-шейп системы корней Φ'. $\square$

4 Изотропные редуктивные группы

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей.

Определение 4.1. Групповая схема G/R называется **редуктивной** (**полупростой**), если выполнены следующие условия:

1. G аффинная, то есть, $G = \operatorname{Spec} A$, где $A = R[G]$;
2. G плоская (то есть, A — плоский R-модуль);
3. для любой точки $s \in \operatorname{Spec} R$ групповая схема $G_{\overline{k(s)}} = G \times_R \overline{\kappa(s)}$ является редуктивной (полупростой) в обычном смысле. Здесь $\kappa(s) = R_s/sR_s$ для простого идеала s, а $\overline{k(s)}$ — алгебраическое замыкание поля $\kappa(s)$.

Замечание 4.2. Выполнение свойств (2) и (3) равносильно (3) + тому, что G гладкая над R.

Пример 4.3. $\mathrm{SL}_n(D)$, где D — центральная простая алгебра с делением над полем k. Это ядро приведенной нормы, а приведенная норма — это скрученная форма определителя. Заметим, что $D \otimes_k \overline{k}$ изоморфно $M_{m\times m}(\overline{k})$. Поэтому $\mathrm{SL}_n(D)$ является редуктивной группой.

Пример 4.4. $\mathrm{GL}(V)$, где V/R — конечно порожденный проективный R-модуль. Тогда $\mathrm{GL}(V)$ — редуктивная группа. Это множество обратимых элементов $\mathrm{End}(V)$

Определение 4.5. [Алгебраический] тор T над R — это такая групповая схема, что локально в топологии fpqc T изоморфен расщепимому тору $(\mathbb{G}_m)^n$ (при этом n может быть разным для разных элементов покрытия).

Что такое группа автоморфизмов расщепимого тора? $\mathrm{Aut}((\mathbb{G}_m)^n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Расшифруем слова «fpqc-покрытие» для аффинной схемы $\operatorname{Spec} R$.

Упражнение 4.6. Для любого fpqc-покрытия $\{U_i \to \operatorname{Spec} R\}$ существует конечное fpqc-покрытие $\{\operatorname{Spec} S_j \to \operatorname{Spec} R\}$ такое, что для любого j имеется открытое вложение $\operatorname{Spec} S_j \to U_i$ для некоторого i.

Другой вариант: у любой точки $s \in \operatorname{Spec} R$ есть открытая аффинная окрестность $\operatorname{Spec} R' \subseteq \operatorname{Spec} R$ и строго плоский гомоморфизм $R' \to S'$ такой, что $\operatorname{Spec} S' \subseteq U_i$ — открытое вложение для какого-то i.

Если T — групповая схема конечного типа над R и тор, то T расщепляется (то есть, изоморфен расщепимому тору $(\mathbb{G}_m)^n$) локально в этальной топологии (теорема Гротендика, SGA3).

Пример 4.7. Рассмотрим схему $X = \operatorname{Spec}(\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 = 1))$. Это нерасщепимый одномерный тор над вещественными числами. Над $\mathbb{C}$ он становится изоморфным $\mathbb{G}_m$.

Правильнее, конечно, писать $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x, x^{-1}])$.

Заметим, что тор — частный случай редуктивной группы.

Определение 4.8. Пусть G — групповая схема, $T \subseteq G$ — замкнутая R-подгруппа. Тогда T называется **максимальным тором** в G, если

1. T — тор;
2. для любой точки $s \in \operatorname{Spec} R$ тор $T_{\overline{\kappa(s)}}$ — максимальный тор в $G_{\overline{\kappa(s)}}$.

Замечание 4.9. Даже в полупростой группе G над кольцом $R = \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ может не быть максимального тора.

Любой максимальный тор в смысле этого определения действительно максимален по включению, но обратное может быть неверно (см. также [GP12]).

Лемма 4.10. (SGA 3) Пусть G/R — редуктивная группа. Тогда G имеет максимальный тор локально в топологии Зариского.

Теорема 4.11. Пусть R — коммутативное кольцо, G/R — редуктивная группа. Тогда G имеет оснащение (кратко: G **расщепима**) локально в топологии fpqc (на самом деле, в этальной).

Доказательство. Локально в топологии fpqc (на покрытии $\{U_i \to \operatorname{Spec} R\}$) группа G содержит расщепимый максимальный тор $T \cong (\mathbb{G}_m)^n$. Напомним, что $\operatorname{Lie}(G)(R) = \operatorname{Ker}(G(R[\varepsilon]) \xrightarrow{\varepsilon \mapsto 0} G(R))$. При этом $\operatorname{Lie}(G)$ — конечно порожденный проективный R модуль. На этом модуле действует тор T. Поэтому $\operatorname{Lie}(G)$ раскладывается в прямую сумму $\operatorname{Lie}(G) = \bigoplus_{\alpha \in X^*(T)} \operatorname{Lie}(G)_\alpha$, где $X^*(T) \cong \mathbb{Z}^n$. Пусть $U_i = \operatorname{Spec} S$. Перейдем от R к S. Над S_p для любой точки $p \in \operatorname{Spec} S$ модули $\operatorname{Lie}(G)_\alpha \otimes_S S_p$ являются одномерными свободными модулями. Поэтому для каждого α найдется $f \in S \setminus p$ такой, что $\operatorname{Lie}(G)_\alpha \otimes_S S_f$ — одномерный свободный. Заметим, что множество характеров α таких, что $\operatorname{Lie}(G)_\alpha \neq 0$, конечно (и не превосходит ранга $\operatorname{Lie}(G)$). Поэтому можно взять S_f так, что все $\operatorname{Lie}(G)_\alpha \otimes_S S_f$ одновременно станут одномерными свободными модулями (или нулевыми) над S_f. Переобозначим $R = S_f$. Пусть $\Phi = \{\alpha \in X^*(T) \mid \operatorname{Lie}(G)_\alpha \neq 0, \alpha \neq 0\}$. Нужно доказать, что это система корней. Заметим, что $X^*(T) = \operatorname{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$, а есть еще кохарактеры $X_*(T) = \operatorname{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$. Если $\alpha \colon T \to \mathbb{G}_m$ — корень, то есть единственный $\alpha^\vee \colon \mathbb{G}_m \to T$ такой, что $\alpha \circ \alpha^\vee = (-)^2$. При этом можно еще выбрать (даже единственным образом) замкнутое вложение $x_\alpha \colon \mathbb{G}_a \cong W(\operatorname{Lie}(G)_\alpha) \to G$ так, что $\operatorname{Lie}(x_\alpha) \colon \operatorname{Lie}(G)_\alpha \to \operatorname{Lie}(G)$ — каноническое вложение, и так, что x_α является T-эквивариантным. Дальше строится редуктивная группа «простого ранга 1», выписываются формулы для $h_\alpha \colon \mathrm{G}_m \xrightarrow{\alpha^\vee} T \to G$ и $w_\alpha(t) \in \operatorname{Norm}_G(T)$. Тогда действие $w_\alpha(t) \in G$ на $\operatorname{Lie}(G)$ переставляет корневые подпространства. Отсюда будет следовать, что Φ — система корней, а $(X^*(T), X_*(T), \Phi, \Phi^\vee)$ — корневые данные. $\square$

Определение 4.12. Пусть G — редуктивная группа над R, $P \leq G$ — замкнутая подгруппа. Будем говорить, что P — **параболическая** (**борелевская**), если

1. P гладкая;
2. $P_{\overline{\kappa(s)}}$ — параболическая (борелевская) в $G_{\overline{\kappa(s)}}$ для любой точки $s \in \operatorname{Spec} R$.

Определение 4.13. Пусть $\mathcal{E} = (T, (M, M^\vee, \Phi, \Phi^\vee), \Pi, \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Pi})$ — оснащение редуктивной группы G, $P \subseteq G$ — параболическая подгруппа. Мы будем говорить, что $\mathcal{E}$ **согласовано с** P, если P — стандартная (положительная) параболическая подгруппа.

Лемма 4.14. Пусть G/R — редуктивная группа, $P \subseteq G$ — параболическая подгруппа. Тогда

1. локально в топологии fpqc группа G обладает оснащением, согласованным с P;
2. P содержит единственную максимальную нормальную гладкую подгруппу U_P такую, что $(U_P)_{\overline{\kappa(s)}}$ — унипотентный радикал в $P_{\overline{\kappa(s)}}$;
3. P содержит максимальную редуктивную подгруппу L_P такую, что $P \cong L_P \ltimes U_P$;
4. локально в топологии fpqc можно выбрать оснащение, согласованное с P и L_P (в частности, $L_P \supseteq T$);
5. если L_P и L'_P — две подгруппы как в пункте (3), то существует $u \in U_P(R)$ такой, что $u L_P u^{-1} = L'_P$.

Набросок доказательства. Есть такая лемма в SGA3: если $H \subseteq G$ — замкнутая гладкая подгруппа такая, что редуктивный ранг $H_{\overline{\kappa(s)}}$ равен редуктивному рангу $G_{\overline{\kappa(s)}}$ для любой точки $s \in \operatorname{Spec} R$, то fpqc-локально H содержит максимальный тор G локально в топологии fpqc.

1. Пусть теперь $P \supseteq T$ — максимальный тор G локально в топологии fpqc. Можно его расщепить и достроить до оснащения.
2. Локально в топологии fpqc мы знаем, что $U_P = \prod U_\alpha$ по α из унипотентной части множества корней, соответствующего P. Можно показать, что $U_P \subseteq P$ — единственная замкнутая подгруппа с соответствующим свойством, и тогда U_P спускается до подгруппы над R (по теореме из первой лекции).
3. Можно доказать, что фактор P/U_P представим и является редуктивной группой. Чтобы построить сечение $P/U_P \to P$, нужно использовать тот факт, что $H^1_{\mathrm{fpqc}}(R, U_P)$ тривиально, поскольку $U_P \cong W(\mathrm{Lie}(U_P))$ (как схема).
4. Понятно: выберем максимальный тор в L_P.
5. Используем то, что $\mathrm{Norm}_P(L) = L$ и $H^1_{\mathrm{fpqc}}(R, U_P)$ тривиально. Кроме того, подгруппа Леви в P — это U_P-торсор.

$\square$

Лемма 4.15. Пусть расщепимый R-тор S действует на G, где G — редуктивная группа над R. Положим $L = \mathrm{Cent}_G(S)$. Пусть $\Psi \subseteq X^*(S) \cong \mathbb{Z}^N$ — множество, замкнутое относительно сложения. Тогда

1. существует единственная гладкая связная подгруппа $U_\Psi \subseteq G$ такая, что $\mathrm{Lie}(U_\Psi) = \bigoplus_{\alpha \in \Psi} U_\alpha$; более того, $L \subseteq U_\Psi$ в случае, если $0 \in \Psi$; L нормализует U_Ψ в случае, если $0 \notin \Psi$;
2. выполнено
   - $U_\Psi = L$, если $\Psi = \{0\}$;
   - U_Ψ редуктивна, если $\Psi = -\Psi$;
   - U_Ψ параболическая, если $\Psi \cup (-\Psi) = X^*(S)$, причем $U_{\Psi \setminus (-\Psi)}$ — ее унипотентный радикал.

Лемма 4.16. Пусть G/R — расщепимая редуктивная группа, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ — два оснащения группы G. Положим $G^{\mathrm{ad}} = G/\mathrm{Cent}(G)$ (в схемном смысле). Тогда есть fpqc-покрытие $\coprod_{i=1}^n \operatorname{Spec} R_i \to \operatorname{Spec} R$ и $g_i \in G^{\mathrm{ad}}(R_i)$ такие, что действие g_i на G_{R_i} переводит $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}'$. Более того, такие g_i единственны.

Набросок доказательства. Наличие оснащения $\mathcal{E}$ гарантирует наличие тора T и содержащей его борелевской подгруппы $B \subseteq G$. Аналогично, в задании оснащения $\mathcal{E}'$ содержится информация о торе T' и борелевской B' в G. Над локальным кольцом (T, B) и (T', B') сопряжены. Поэтому локально в топологии Зариского пары (T, B) и (T', B') сопряжены. Дальше нужно подогнать параметризации корневых подгрупп; это можно сделать локально в fpqc-топологии. Единственность по сути следует из того, что нормализатор B в G равен B, нормализатор T в B равен T, и тому подобное. $\square$

5 Относительные корневые подсхемы

Теорема 5.1 (см. [PS09, § 2] и [Sta14, Lemma 3.6])**.** Пусть G/R — редуктивная группа, $P \le G$ — параболическая подгруппа, L — ее подгруппа Леви. Тогда существует разложение $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$, где R_i — коммутативные кольца (то есть, $\operatorname{Spec} R = \coprod_{i=1}^{n} \operatorname{Spec} R_i$), такое, что для каждого $V = \operatorname{Spec} R_i$, $1 \le i \le m$, выполнено следующее:

1. для любого $s \in V$ диаграмма Дынкина системы корней Φ для $G_{\overline{k(s)}}$ одна и та же;

2. для любого $s \in V$ тип $L_{\overline{\kappa(s)}}$ один и тот же, и равен $D \setminus J$ (где $J \le D$ — тип подгруппы P);

3. для любого $s \in V$ можно выбрать нетерово связное кольцо $Q = Q_s$, морфизм $f\colon V \to \operatorname{Spec} Q_s = U_s$ и редуктивную группу G_s/Q_s, удовлетворяющую $G_V \cong G_s \times_{Q_s} V$ так, что группа $\pi_1^{\text{ét}}(U, \overline{\kappa(s)})$ $\star$-действует на диаграмме Дынкина D (общей для $G_{\overline{\kappa(s)}}$ и $(G_s)_{\overline{\kappa(f(s))}}$) посредством одной и той же подгруппы в $\operatorname{Aut}(D)$.

Определение 5.2. Пусть G — редуктивная группа над R. Мы будем называть **локальным оснащением** набор данных τ, состоящий из

- $U_\tau = \operatorname{Spec} R_\tau \subseteq \operatorname{Spec} R$,
- сторого плоской R_τ-алгебры $S\tau$,
- оснащения $\mathcal{E}_\tau = (T_\tau, \dots)$ группы $G_{S_\tau} = G \times_R S_\tau$.

Доказательство. Если σ, τ — два локальных оснащения, то появляются два оснащения $\mathcal{E}_\sigma$, $\mathcal{E}_\tau$ на $G_{S_\tau \otimes_R S_\sigma}$. Мы уже знаем, что любые два оснащения сопряжены локально в fpqc-топологии. Поэтому имеется покрытие $\{\coprod_i \operatorname{Spec} Q_{\sigma\tau i} \to S_\tau \otimes_R S_\sigma\}$ и элементы $g_{\sigma\tau i} \in G^{\text{ad}}(Q_{\sigma\tau i})$, переводящие $\mathcal{E}_\sigma$ в $\mathcal{E}_\tau$ в $G_{Q_{\sigma\tau i}}$. Возьмем те локальные оснащения, которые согласованы с P и L (то есть, $T_\tau \subseteq L_{S_\tau}$). Тогда $g_{\sigma\tau i} \in \overline{L}(Q_{\sigma\tau i})$, где $\overline{L}$ — образ L в G^{ad}.

Для каждого типа расщепимой группы, который встречается в этом наборе, зафиксируем «модельную» групповую схему Шевалле–Демазюра $G_0((M, M^\vee, \Phi, \Phi^\vee, \Pi))$. Любая G_{S_τ} изоморфна какой-то $G_0(\dots)$; фиксируем такой изоморфизм (сохраняющий оснащение) для каждого τ, для которого тип (P_{S_τ}, L_{S_τ}) один и тот же. В частности, это означает, что корни в Π_τ пронумерованы.

Теперь каждому $g_{\sigma\tau i}$ соответствует некоторый элемент $\gamma_{\sigma\tau i} \in \operatorname{Hom}(D_\sigma, D_\tau)$. Определим группоид $\mathcal{D}$: его объекты — D_τ, где τ — локальное оснащение, согласованное с P и L. Морфизмы $D_\sigma \to D_\tau$ — множество всевозможных $\gamma_{\sigma\tau i} \in \operatorname{Hom}(D_\sigma, D_\tau)$. Мы утверждаем, что D_τ, D_σ принадлежат одной компоненте связности группоида $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\tau = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n = \sigma$ такая,что $U_{\tau_i} \cap U_{\tau_{i+1}} \neq \varnothing$.

Пусть $\mathcal{D}_\alpha$, $\alpha \in A$ — все компоненты связности группоида $\mathcal{D}$. Пусть $V_\alpha = \bigcup_{D_\tau \in \mathcal{D}_0} U_\tau$. Это открытое подмножество в $\operatorname{Spec} R$. Понятно, что $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \operatorname{Spec} R$. Выберем в нем конечное подпокрытие. С другой стороны, понятно, что это покрытие дизъюнктное; поэтому оно аффинно, то есть, имеются $V_i = \operatorname{Spec} R_i$ такие, что $\operatorname{Spec} R = \coprod_{i=1}^{m} \operatorname{Spec} R_i$. Оно удовлетворяет всем нужным свойствам: пусть $V = V_i = \operatorname{Spec} R_i$, где $1 \le i \le m$. Тогда у любого $s \in V$ существует окрестность $s \in U_\tau = \operatorname{Spec} R_\tau \subseteq \operatorname{Spec} R_i$ и локальное оснащение $\tau = (U_\tau, S_\tau, \mathcal{E}_\tau)$. При этом ясно, что тип $G_{\overline{\kappa(s)}}$ и тип G_{S_τ} один и тот же. Действительно, имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R_\tau & \longrightarrow & S_\tau \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\kappa(s)} & \longrightarrow & \overline{\kappa(s')} \end{array}$$

Для любой другой $\widetilde{s}$ в V тип $G_{S_{\widetilde{\tau}}}$ такой же, что и тип $G_{S_\tau} = D_\tau$.

Пункт (2) доказывается совершенно аналогично.

Пункт (3): в группоиде есть группа $\Gamma_\sigma = \mathrm{Aut}(D_\sigma) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D_\sigma, D_\sigma) \le \mathrm{Aut}(D_\sigma)$. Нам нужно показать, что для любой точки $s \in V$ и локального оснащения τ группа Γ_τ одна и та же. $\square$

Пусть S — расщепимый R-тор, который действует автоморфизмами на некоторой редуктивной группе G/R. Обозначим $\Phi(S,G) = \{\alpha \in X^*(S) \mid \alpha \neq 0, \mathrm{Lie}(G)_\alpha \neq 0\}$. Напомним, что $\mathrm{Lie}(G) = \bigoplus_{\alpha \in X^*(S)} \mathrm{Lie}(G)_\alpha$.

Замечание 5.3. Пусть V_1, V_2 — конечно порожденные проективные R-модули. Тогда морфизм схем $f\colon W(V_1) \to W(V_2)$ — это то же самое, что элементы $\mathrm{Sym}^*(V_1^*) \otimes_R V_2$. Отображение f называется **однородным степени** i, если оно лежит в $\mathrm{Sym}^i(V_1^*) \otimes_R V_2$.

Теорема 5.4. В условиях теоремы 5.1 пусть $\overline{L}$ — образ L в G^{ad}. По теореме 5.1 теперь $R = \prod_{i=1}^n R_i$; пусть теперь $R_0 = R_i$ для некоторого i. Тогда

1. существует единственный максимальный расщепимый тор $S \subseteq \mathrm{Cent}(\overline{L}_R)$ такой, что для любой R_0-алгебры $\widetilde{R}$ если $G_{\widetilde{R}}$ имеет оснащение, согласованное с P и L, и $T \subseteq \overline{L}_{\widetilde{R}}$ — расщепимый максимальный тор, то ядро сюръективного отображения $\mathrm{res}\colon X^*(T) \to X^*(S_{\widetilde{R}})$ порождается элементами $\alpha \in D \setminus J$ и $\alpha - \gamma(\alpha)$, $\alpha \in J, \gamma \in \Gamma$. Таким образом, $\mathrm{res} = \pi_{J,\Gamma}$, $\Phi(S,G) = \Phi_{J,\Gamma}$.

2. В ситуации пункта (1) для любого $A \in \Phi_{J,\Gamma} = \Phi(S,G)$ есть замкнутое S-эквивариантное вложение R_0-схем $X_A\colon W(\mathrm{Lie}(G)_A \otimes_R R_0) \to G_{R_0}$ такое, что для любого $u = \sum_{\alpha \in \pi_{J,\Gamma}^{-1}(A)} c_\alpha e_\alpha \in \mathrm{Lie}(G)_A \otimes_R R_0 = \mathrm{Lie}(G_{R_0})_A$ выполнено
$$X_A(\sum_{\alpha \in \pi^{-1}(A)} c_\alpha e_\alpha) = \prod_{\alpha \in \pi^{-1}(A)} x_\alpha(c_\alpha) \cdot \prod_{i \ge 2} \prod_{\beta \in \pi^{-1}(iA)} x_\beta(P^i_{A,\beta,\widetilde{R}}(u)), \qquad (1)$$
где $P^i_{A,\beta,\widetilde{R}}\colon \mathrm{Lie}(G_{R_0})_A \to \widetilde{R}$ — однородные полиномиальные отображения степени i (для краткости мы пишем π вместо $\pi_{J,\Gamma}$).

Начиная с этого момента, считаем, что $R = R_0$ (после замены базы).
Введем некоторые обозначения.

- $\Phi_P = \Phi_{J,\Gamma} = \Phi(S,G)$, $\pi = \pi_{J,\Gamma}\colon \Phi \to \Phi_P \cup \{0\}$;
- Каждому унипотентному множеству относительных корней (то есть, замкнутому относительно сложения и не содержащему двух противоположных = специальному) $\Psi \subseteq \Phi_P$ взаимно однозначно соответствует замкнутое относительно сложения подмножество $\mathbb{N}\Psi \subseteq X^*(S)$, не содержащее нуля. По такому множеству мы строили (лемма 4.15) подсхему $U_{\mathbb{N}\Psi} \subseteq G$. Ее мы будем обозначать просто через U_Ψ.
- Положим $(A) = \mathbb{N}A \cap \Phi_P$, $[A,B] = (\mathbb{N}A + \mathbb{N}B) \cap \Phi_P$.

Следствие 5.5 (см. [PS09, Lemma 6])**.** Пусть $\Psi \subseteq \Phi_P$ — унипотентное множество. Тогда морфизм
$$X_\Psi\colon W(\bigoplus_{A \in \Psi} V_A) \to U_\Psi,$$
$$(v_A)_{A \in \Psi} \mapsto \prod_{A \in \Psi} X_A(v_A)$$
является изоморфизмом R-схем (для любого фиксированного порядка множителей).

Доказательство. Заметим, что X_Ψ — действительно морфизм R-схем. Чтобы доказать, что X_Ψ — изоморфизм, достаточно это сделать локально в fpqc-топологии. То есть, можно перейти к $\widetilde{R}$ и использовать формулу (1). При этом $\Theta = \pi^{-1}(\Psi) \subseteq \Phi$ — тоже унипотентное множество корней, и $(U_\Psi)_{\widetilde{R}} = U_\Theta$. Например, пусть $\Psi = (A)$. Тогда

$$X_\Psi\Big(\sum_{\alpha\in\pi^{-1}(\Psi)=\Theta} c_\alpha e_\alpha\Big)$$
$$= \prod_{\alpha\in\pi^{-1}(A)} x_\alpha(c_\alpha)\cdot \prod_{\beta\in\pi^{-1}(2A)} x_\beta(c_\beta + P^2_{\beta,R}(\dots))\cdot \prod_{\gamma\in\pi^{-1}(3A)} x_\gamma(c_\gamma + P^3_{\gamma,R}(\dots)+\dots)$$

Видно, что такое преобразование обратимо. □

Следствие 5.6 (см. [PS09, Thm 2, Lemma 9])**.** В ситуации Теоремы 5.4 предположим снова, что $R = R_0$. Тогда

1. есть однородные полиномиальные отображения $q^i_A\colon V_A\oplus V_A \to V_{iA}$ степени $i\geq 2$ такие, что для любого R'/R и для любых $v, w\in V_A\otimes_R R'$ выполнено
$$X_A(v)X_A(w) = X_A(v+w)\prod_{i\geq 2} X_{iA}(q^i_A(v,w));$$
2. для любого $g\in L(R)$ есть однородные полиномиальные отображения $\varphi^i_{g,A}\colon V_A \to V_{iA}$ степени $i\geq 1$ такие, что для любого R'/R и $v\in V_A\otimes_R R'$ выполнено
$$gX_A(v)g^{-1} = \prod_{i\geq 1} X_{iA}(\varphi^i_{g,A}(v));$$
3. выполнена *обобщенная коммутационная формула Шевалле*: пусть $A, B\in\Phi_P$ таковы, что $mA\neq -kB$ ни для каких $m, k\geq 1$. Тогда существуют однородные полиномиальные отображения $N_{ABij}\colon V_A\times V_B\to V_{iA+jB}$ степени (i,j), где $i,j>0$, такие, что для любых R'/R, $u\in V_A\otimes_R R'$, $v\in V_B\otimes_R R'$ выполнено
$$[X_A(u), X_B(v)] = \prod_{i,j>0} X_{iA+jB}(N_{ABij}(u,v)).$$

Доказательство. 1. У нас есть умножение $m\colon G\times G\to G$ и индуцированное им отображение $m_A\colon X_A(W(V_A))\times X_A(W(V_A))\to G$. Заметим, что образ m_A заведомо содержится в подгруппе $U_{(A)}$, которая изоморфна (как R-схема) схеме $\prod_{i\geq 1} X_{iA}(W(V_{iA}))$ (по следствию 5.5). Рассмотрим композицию с проекцией на i-й сомножитель $p_i\colon \prod_{i\geq 1} X_{iA}(W(V_{iA}))\to X_{iA}(W(V_{iA}))$. Построим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
W(V_A)\times W(V_A) \arrow[r, "X_A\times X_A"] \arrow[d, "\cong"] & X_A(W(V_A))\times X_A(W(V_A)) \arrow[d, "m_A"] \\
W(V_A\oplus V_A) \arrow[ddr] & U_{(A)} \arrow[d, "p_i"] \\
 & X_{iA}(W(V_{iA})) \arrow[d, "\cong"] \\
 & W(V_{iA})
\end{tikzcd}$$

Мы получили морфизм схем, который дает нам полиномиальные отображения q^i_A. По формуле (1) локально в fpqc-топологии отображение q^i_A является однородным степени i, то есть, $q^i_A\in \mathrm{Sym}^i((V_A\oplus V_A)^*)\otimes_R V_{iA}$. Поэтому оно и глобально является таким (поскольку это тоже пучок в fpqc-топологии).

2. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
W(V_A) \arrow[r, "X_A"] \arrow[ddddrr, "\varphi^i_{g,A}"] & X_A(W(V_A)) \arrow[r, "(-)^g"] & gX_A(W(V_A))g^{-1} \arrow[d] \\
& & gU_{(A)}g^{-1} \arrow[d] \\
& & U_{(A)} \arrow[d, "p_i"] \\
& & X_{iA}(W(V_A)) \arrow[d, "X_{iA}^{-1}"] \\
& & W(V_{iA}).
\end{tikzcd}$$

Из нее видно, что $\varphi^i_{g,A}$ — морфизм схем, потому он полиномиален, и по формуле (1) он однороден степени i локально в fpqc-топологии, а потому и над базой.

3. Запишем $[X_A(u), X_B(v)] = X_A(u)X_B(v)X_A(u)^{-1}X_B(v)^{-1}$. Мы знаем, что $X_A(u)^{-1} = X_A(-u)\cdot\prod_i X_{iA}(\dots)$. Осталось вспомнить, что $[X_A(W(V_A)), X_B(W(V_B))] \subseteq U_{[A,B]}$, где $[A,B] = (\mathbb{N}A + \mathbb{N}B) \cap \Phi_P$.

$\square$

6 Обобщенная коммутационная формула Шевалле и ее следствия

Мы уже сформулировали (и доказали) обобщенную коммутационную формулу Шевалле. На протяжении этого параграфа мы считаем, что даны редуктивная группа G, $P \subseteq G$, $L \subseteq P$, тип G постоянен и равен Φ, тип L — это $\Pi \setminus J$, где Π — система простых корней в Φ, зафиксирована подгруппа $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(\Phi)$ (все это как в теореме 5.1, но $R = R_i$ для какого-то i), $\pi = \pi_{J,\Gamma}\colon \Phi \to \Phi_P \cup \{0\}$, $\Phi_P = \Phi_{J,\Gamma}$. Для простоты предполагаем, что Φ неприводима (и тогда Φ_P тоже неприводима).

Лемма 6.1 (см. [PS09, Lemma 10] и [LS12, Lemma 2])**.** Пусть $A, B, A+B \in \Phi_P$ и $mA \neq -kB$ ни для каких $m, k \geq 1$. Тогда

1. Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:
   (a) структурные константы Φ обратимы в R;
   (b) $A \neq B$ и $A - B \notin \Phi_P$;
   (c) $\Phi = \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l, \mathrm{F}_4$ и существуют длинные корни $\alpha \in \pi^{-1}(A)$, $\beta \in \pi^{-1}(B)$ такие, что $\alpha + \beta \in \Phi$;
   (d) $\Phi = \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l, \mathrm{F}_4$ и $\pi^{-1}(A+B)$ состоит из коротких корней.

   Тогда $\langle \mathrm{Im} N_{AB11} \rangle = V_{A+B}$.

2. Если $A - B \in \Phi_P$ и $\Phi \neq \mathrm{G}_2$, то

$$\langle \mathrm{Im} N_{AB11} \rangle + \langle \mathrm{Im} N_{A-B,2B,1,1} \rangle + \sum_{v \in V_B} \langle \mathrm{Im}(N_{A-B,B,1,2}(-, v)) \rangle = V_{A+B}.$$

   (если $2B \notin \Phi_P$, то считаем, что $N_{A-B,2B,1,1} = 0$).

Доказательство. Отображение $N_{AB11}\colon V_A\times V_B\to V_{A+B}$; ему соответствует отображение $N_{AB11}\colon V_A\otimes V_B\to V_{A+B}$; достаточно доказать, что оно сюръективно. Это можно доказывать в fpqc-топологии, так как если дано fpqc-покрытие $R\to S=\prod_{i=1}^n S_i$, то f — строго плоский гомоморфизм. Поэтому сюръективность достаточно проверять над S, а значит, достаточно проверять над всеми S_i. Таким образом, можно считать, что G расщепима и даже имеет оснащение, согласованное с P и L. В частности, мы можем применять формулу 1.

Напомним, что $\mathrm{Lie}(G)_{A+B}=V_{A+B}$ порождено всеми e_γ, где $\gamma\in\pi^{-1}(A+B)$ (как R-модуль). Для любого $\gamma\in\pi^{-1}(A+B)$ найдутся $\alpha\in\pi^{-1}(A)$, $\beta\in\pi^{-1}(B)$ такие, что $\gamma=\alpha+\beta$. Тогда $\Lambda=[X_A(e_\alpha),X_B(e_\beta)]=[x_\alpha(1)\prod_{i\geq 2}X_{iA}(\dots),x_\beta(1)\prod_{i\geq 2}X_{iB}(\dots)]$. Мы знаем, что $\Lambda\in U_{[A,B]}$. Положим $\Psi=[A;B]\setminus\{A+B\}$; это унипотентное множество корней. Нетрудно убедиться, что $U_\Psi\trianglelefteq U_{[A,B]}$ (по обобщенной коммутационной формуле Шевалле). По модулю U_Ψ получаем, что Λ равно $[x_\alpha(1),x_\beta(1)]=x_\gamma(N_{\alpha\beta 11})\cdot\prod_{i,j>0,(i,j)\neq(1,1)}x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij})$, что (снова по модулю U_Ψ) равно $x_\gamma(N_{\alpha\beta 11})$.

В случае (a) $N_{\alpha\beta 11}\in R^*$. В случае (b) получаем $\alpha-\beta\notin\Phi$, поэтому $N_{\alpha\beta 11}=\pm 1$. В случае (c) проблема только если γ длинный; $W(L)$ действует транзитивно на корнях одной длины; поэтому *любой* длинный корень является суммой двух длинных, в том числе и γ. Поэтому $N_{\alpha\beta 11}=\pm 1$. В случае (d) корень γ короткий, поэтому $N_{\alpha\beta 11}=\pm 1$.

Значит, $\Lambda\in X_{A+B}(N_{\alpha\beta 11}e_\gamma)\cdot U_\Psi$. Поэтому $N_{AB11}(e_\alpha,e_\beta)=N_{\alpha\beta 11}\cdot e_\gamma$. Итого, $e_\gamma\in\mathrm{Im}N_{AB11}$.

Докажем вторую часть. Как и в первой, если $\gamma\in\pi^{-1}(A+B)$ — короткий корень, то $e_\gamma\in\langle\mathrm{Im}N_{AB11}\rangle$. То же выполнено, если γ длинный и сумма двух длинных из A и B. Если γ — длинный корень и сумма коротких, то $\gamma=\alpha+2\beta$, где $\beta\in\pi^{-1}(B)$, $\alpha+\beta\in\pi^{-1}(A)$ — короткие ортогональные корни. Положим $\Psi=[A-B,B]\setminus\{A+B\}$. Посмотрим на $[X_{A-B}(e_\alpha),X_B(e_\beta)]$ по модулю U_Ψ. Получим $x_\gamma(\pm 1)\cdot\prod_{\beta'\in\pi^{-1}(2B)}[x_\alpha,x_{\beta'}(u_{\beta'})]$. Тогда $e_\gamma\in\langle\mathrm{Im}N_{A-B,B,1,2}(-,e_\beta)\rangle+\langle\mathrm{Im}N_{A-B,2B,1,1}\rangle$. Представим $e_\beta\in V_B\otimes_R S$ как сумму $e_\beta\sum a_if_i$, где $f_i\in V_B$, $a_i\in S$. Тогда $[X_{A-B}(e_\alpha),X_B(e_\beta)]=[X_{A-B}(e_\alpha),\prod_i X_B(a_if_i)\cdot\prod_{j\geq 2}X_{jB}(\dots)]$. Мы утверждаем, что по модулю U_Ψ это равно $X_{A+B}(u)$, где $u\in\sum_i N_{A-B,B,1,2}(e_\alpha,a_if_i)+\langle\mathrm{Im}N_{AB11}\rangle+\langle\mathrm{Im}N_{A-B,2B,1,1}\rangle$. Первая сумма здесь равна $\sum_i N_{A-B,B,1,2}(a_i^2e_\alpha,f_i)$, и f_i уже определены над базой, что и требовалось. $\square$

Дополнение к следствию 5.6:

(4) для любого $A\in\Phi_P$ есть полиномиальное однородное отображение $r_A^i\colon V_A\to V_{iA}$ степени i такое, что для любого R'/R и для любого $v\in V_A\otimes_R R'$ выполнено $X_A(v)^{-1}=X_A(-v)\prod_{i\geq 2}X_{iA}(r_A^i(v))$.

Вопрос: верно ли, что все r_A^i равны нулю (для каких-то параметризаций)?

Лемма 6.2 (см. PS, Lemma 1)**.** Пусть $A\in\Phi_P$, $\mathrm{rk}\,\Phi_P\geq 2$. Тогда существуют линейно независимые $B,C\in\Phi_P$ такие, что $A=B+C$. Если $\Phi=G_2$, то можно выбрать B,C так, что еще и $B-C\notin\Phi_P$.

Доказательство. Так как $\mathrm{rk}\,\Phi_P\geq 2$, то из $\Phi=G_2$ следует, что $\Phi_P=\Phi$. Тогда можно считать, что $A=\alpha_1$ (короткий) или α_2 (длинный). В первом случае $B=\alpha_1+\alpha_2$, $C=-\alpha_2$; во втором случае $B=3\alpha_1+2\alpha_2$, $C=-(3\alpha_1+\alpha_2)$. Пусть теперь $\Phi\neq G_2$. Не умаляя общности мы можем считать, что $A\in\Phi_P^+$.

- *Случай 1:* $A=k\pi(\alpha_r)$, где $\alpha_r\in\Pi\subseteq\Phi$, $k\geq 1$. Пусть $\alpha_s\in J\setminus(\Gamma\cdot\alpha_r)$ — ближайший корень к α_r на диаграмме Дынкина D. Тогда для любого $\alpha\in\pi^{-1}(A)$ выполнено $m_{\alpha_s}(\alpha)=0$. Положим $\beta=\alpha_s+$ сумма простых между α_s и α_r на диаграмме Дынкина, не включая α_r. Тогда можно взять $B=\pi(\beta+\alpha)$, $C=\pi(-\beta)$.

- *Случай 2:* $A\neq k\pi(\alpha_r)$ для всех $k\geq 1$, $\alpha_r\in J$. Пусть $\alpha\in\pi^{-1}(A)$. Тогда найдутся $\beta_1,\dots,\beta_n\in\Pi$ такие, что $\alpha=\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n$ и каждая частичная сумма $\beta_1+\dots+\beta_i$ является корнем (для всех $i=1,\dots,n$). Пусть i_0 — это максимальный i такой, что

$\beta_i \in J$. Тогда $\pi(\beta_1+\dots+\beta_{i_0}) = \pi(\alpha) = A$. Можно положить $B = \pi(\beta_1+\dots+\beta_{i_0-1}$, $C = \pi(\beta_{i_0})$.

□

Лемма 6.3 (PS, Lemma 11)**.** Пусть $\mathrm{rk}\,\Phi_P \geq 2$. Тогда для любого $A \in \Phi_P$ и для любого $v \in V_A$ существуют $B_i, C_i \in \Phi_P$, линейно независимые с A, элементы $v_i \in V_{B_i}$, $u_i \in V_{c_i}$, числа $k_i, l_i > 0$, $n_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq m)$ такие, что в $G(R[X,Y])$ выполнено $X_A(XY^2v) = \prod_{i=1}^m X_{B_i}(X^{k_i}Y^{n_i}v_i^{X_{c_i}(Y^{l_i}u_i)}$.

Доказательство. По лемме 6.2 существуют линейно независимые с A относительные корни $B, C \in \Phi_P$ такие, что $A = B+C$. Не умаляя общности можно считать, что $A \in \Phi_P^+$ и доказательство можно вести индукцией по высоте A. По коммутационной формуле Шевалле элемент $X_A(XY^2v)$ принадлежит подгруппе, порожденной элементами

- $[[X_B(xV_B), X_C(Y^2V_C)]$;
- $X_{iB+jC}(X^iY^{2j}V_{iB+jC})$, $i,j>0$, $(i,j) \neq (1,1)$;
- если $B-C \in \Phi_P$, то и $[X_{B-C}(XV_{B-C}), X_{2C}(Y^2V_{2C})]$, плюс все сомножители из него, как в (2);
- $[X_{B-C}(XV_{B-C}), X_C(YV_C)]$ плюс все сомножители из него, как в (2).

Все корневые элементы теперь имеют вид $X_F(\dots)$, где F — линейно независим с A; или $F = iA$, $i \geq 2$; применим индукцию по убыванию высоты относительного корня A. □

Лемма 6.4. Для любого $A \in \Phi_P$, для любой R-алгебры $\widetilde{R}$ такой, что G имеет над $\widetilde{R}$ оснащение, согласованное с P и L_P, для любого $v \in V_A$ имеем

$$X_A(u) = \prod_{\alpha\in\pi^{-1}(A)} x_\alpha(v_\alpha) \cdot \prod_{i\geq 2} X_{iA} f^i_{A,\widetilde{R}}(v)),$$

где $v = \sum_{\alpha\in\pi^{-1}(A)} v_\alpha e_\alpha$, $f^i_{A,\widetilde{R}}\colon \mathrm{Lie}(G)_A \otimes_R \widetilde{R} \to \mathrm{Lie}(G)_{iA} \otimes_R \widetilde{R}$, $i \geq 2$ — однородные полиномиальные отображение степени i.

Доказательство. Индукция по высоте A. В формуле 1 были произведения вида

$$\prod_{\beta\in\pi^{-1}(iA)} x_\beta(P^i_{A,\beta,\widetilde{R}}(v)) = X_{iA}(\sum_\beta P^i_{A,\beta,\widetilde{R}}(v)e_\beta) \cdot \prod_{j\geq 2} X_{ijA}(f^j_{iA,\widetilde{R}}(\sum_\beta P^i_{A,\beta,\widetilde{R}}(v)e_\beta)).$$

□

7 Лемма о замене параболической

Пусть G/R — редуктивная группа, $P \leq Q \leq G$ — две параболические подгруппы с подгруппами Леви $L_P \leq L_Q$ (тогда $U_P \geq U_Q$). По теореме 5.1 существует разбиение $R = \prod R_i$ для пары (P, L_P). По теореме 5.1 существует разбиение $R_i = \prod R_{ij}$ для $(Q_{R_i}, (L_Q)_{R_i})$. Тогда над каждым R_{ij} постоянны:

- тип Φ группы G;
- тип $\Pi \setminus J_P$ и тип $\Pi \setminus J_Q$;
- $\star$-действие $\pi_1^{\text{ét}}(-, \overline{k(s)})$, соответствующее $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(D)$.

По теореме 5.4 существуют $S_P \leq \mathrm{Cent}(L_P)$, $S_Q \leq \mathrm{Cent}(L_Q)$ и корневые подсхемы X_A, $A \in \Phi_P$, X_B, $B \in \Phi_Q$.

Есть ограничения характеров

$$\begin{tikzcd}
X^*(T) \arrow[rr] \arrow[dr] & & X^*((S_P)_{\widetilde{R}}) \arrow[dl] \\
& X^*((S_Q)_{\widetilde{R}}) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Phi \arrow[rr, "\pi_P"] \arrow[dr, "\pi_Q"'] & & \Phi_{J_P,\Gamma} \cup \{0\} = \Phi_P \cup \{0\} \arrow[dl, "\pi_{PQ}"] \\
& \Phi_{J_Q,\Gamma} \cup \{0\} = \Phi_Q \cup \{0\} &
\end{tikzcd}$$

Здесь π_{PQ} — фактор по $F \in \pi_P(\Pi \setminus J_Q) = \pi_P(J_P \setminus J_Q)$.

Лемма 7.1 (Лемма о замене параболической)**.** Пусть G, P, Q — как выше, и $R = R_{ij}$ для некоторых i, j. Существует $k > 0$ такое, что для любых $A \in \Phi_P$ и $v \in V_A$ существуют B_i, $C_{ij} \in \Phi_Q$, $v_i \in V_{B_i}$, $u_{ij} \in V_{C_{ij}}$ и $k_i, n_i, l_{ij} > 0$ такие, что

$$X_A(XY^k v) = \prod_{i=1}^{m} X_{B_i}(X^{k_i} Y^{n_i} v_i)^{\prod_{j=1}^{n_i} X_{C_{ij}}(Y^{l_{ij}} u_{ij})}$$

в $G(R[X, Y])$.

Доказательство. Случай 1: $\pi_{PQ}(A)$ не равно 0 и равно некоторому $B \in \Phi_Q$. Тогда $U_{(A)}$ содержится в $U_{(B)}$, поскольку $\mathrm{Lie}(G)_{iA} \subseteq \mathrm{Lie}(G)_{iB}$ для всех $i \geq 1$. Поэтому существуют полиномиальные $\lambda^i_{A,B} \colon V_A \to V_{iB}$ такие, что $X_A(v) = \prod_{i \geq 1} X_{iB}(\lambda^i_{A,B}(v))$. На самом деле, $\lambda^i_{A,B}$ — однородные степени i.

Случай 2: $\pi_{PQ}(A) = 0$ и $J_P \setminus J_Q$ состоит из одной Γ-орбиты. Из этого следует, что $A = \pm k\pi(\alpha_r)$ для некоторого $\alpha_r \in J_P \setminus J_Q$. Не умаляя общности считаем, что $A = k\pi(\alpha_r)$. Так как $J_Q \neq \varnothing$, то $\mathrm{rk}\, \Phi_P \geq 2$. В этом случае используем лемму 6.3: там все $B_i, C_i \in \Phi_P$ удовлетворяют $\pi_{PQ}(B_i) \neq 0$ и $\pi_{PQ}(C_i) \neq 0$, и можно к каждому корневому элементу применить результат случая 1.

Случай 3: $\pi_{PQ}(A) = 0$ и $J_P \setminus J_Q$ состоит из ≥ 2 Γ-орбит. Пусть $O \subseteq J_P \setminus J_Q$. По лемме 4.15 есть параболическая $Q' \subseteq G$, для которой $\mathrm{Lie}(Q') = \bigoplus_{F \in \Psi} \mathrm{Lie}(G)_F$, $\Psi = \pi_P((\mathbb{N} \cdot J_{Q'} \cup \mathbb{Z} \cdot (\Pi \setminus J_{Q'}) \cap \Phi_P)$, где $J_{Q'} = O \cup J_Q$. Дальше — индукция. $\square$

Список литературы

[ABS90] H. Azad, M. Barry и G. M. Seitz. On the structure of parabolic subgroups. *Comm. algebra*, 18(2):551—562, 1990.

[FGIKNV06] Barbara Fantechi, Lothar Göttsche, Luc Illusie, Steven Kleiman, Nitin Nitsure и Angelo Vistoli. Fundamental algebraic geometry. *Mathematical surveys and monographs*, октябрь 2006. ISSN: 2331-7159. DOI: `10.1090/surv/123`. URL: `http://dx.doi.org/10.1090/surv/123`.

[GP12] Philippe Gille и Arturo Pianzola. Torsors, reductive group schemes and extended affine lie algebras, февраль 2012. eprint: `1109.3405`.

[LS12] A. Yu. Luzgarev и A. K. Stavrova. Elementary subgroup of an isotropic reductive group is perfect. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 23(5):881—890, октябрь 2012. DOI: `10.1090/S1061-0022-2012-01221-5`. URL: `http://dx.doi.org/10.1090/S1061-0022-2012-01221-5`.

[PS09] V. Petrov и A. Stavrova. Elementary subgroups of isotropic reductive groups. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 20(4):625—644, август 2009. DOI: 10.1090/S1061-0022-09-01064-4. URL: http://dx.doi.org/10.1090/S1061-0022-09-01064-4.

[Sta14] A. Stavrova. Non-stable K_1-functors of multiloop groups, апрель 2014. arXiv: 1404.7587. eprint: 1404.7587.