17.05.2013

С. Ягунов

Эллиптические кривые, эллиптические функции и модулярные формы

разделы:

- аналитическая теория
- арифметическая теория
- алгебраическая теория

\+ топология (эллиптические когомологии и топологические модулярные формы)

\+ алгоритмический раздел

Глава 0 | Введение.

Как связаны между собой эллиптические функции, эллиптические кривые и модулярные формы?

X — (линейно) связное топологическое пространство

координатная окрестность

$\simeq$ открытое мн-во в $\mathbb{C}$

Определение Риманова поверхность = связное хаусдорфово топологическое пространство + комплексная структура

$f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ – голоморфна (мероморфна), если композиции с лок.гомеом. такие.

Сверхзадача: Изучить все мероморфные (голоморфные) функции на всех возможных римановых поверхностях.

А какие бывают римановы поверхности?

$\forall$ р.п. X $\exists$ односвязное $\tilde{X}$ и локальный гомеоморфизм

$\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ $\quad$ Γ действует на $\tilde{X}$ над X

$\rightarrow X = \Gamma \backslash \tilde{X}$ $\quad$ (транзитивно на слоях)

Теорема $\forall$ односвязная риманова поверхность изоморфна одной из:

1) риманова сфера (компактная р.п.)

2) само $\mathbb{C}$

3) $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

(теорема униформизации: Koebe, Poincaret (1907))

Заменим $\mathbb{D}$ на $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

$$\mathbb{H} \xrightarrow{\frac{z-i}{z+i}} \mathbb{D}$$

$\Gamma \backslash \mathbb{H}$ – р.п. Какие бывают Γ?

$SL_2(\mathbb{R})$ действует на $\mathbb{H}$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \alpha z = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\operatorname{Im} \alpha(z) = \frac{\operatorname{Im}(adz + bc\bar{z})}{|cz+d|^2} = \frac{\overbrace{(ad-bc)}^{=1}}{|cz+d|^2} \operatorname{Im} z$$

$$\{\pm I\} \subset SL_2(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \underbrace{SL_2(\mathbb{R}) / \{\pm I\}}_{\substack{\shortparallel \\ \operatorname{Aut}(\mathbb{H})}} \curvearrowright \mathbb{H}$$

$\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ – все биголоморфные автоморфизмы

Какие в $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ дискретные подгруппы?

$$\Gamma = \Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$$

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a \equiv d \equiv 1 \pmod N,\ b \equiv c \equiv 0 \pmod N \right\}$$

$\Gamma(N) \subset SL_2(\mathbb{Z})$ – главная конгруэнц-подгруппа

$$Y(N) = \Gamma(N) \backslash \mathbb{H}$$

– некомпактная риманова поверхность

– $\exists$ каноническая компактификация конечным числом точек (параболические точки)

$\rightsquigarrow$ получаем $X(N)$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Мероморфная функция на $\mathbb{H}$, инвариантная отн-но $\Gamma(N)$ и <u>мероморфная</u> <u>во</u> <u>всех</u> <u>параболических</u> <u>точках</u> называется <u>модулярной функцией</u> уровня N.

(т.е. продолжение имеет полюс в этих точках, а не сущ. особенность)

$\Gamma = \Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$

$\rightsquigarrow f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z)$

В частности, $f(z+1) = f(z)$ $\quad$ (для $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

$q = e^{2\pi i z} \quad \rightsquigarrow f(z) = f^*(q)$

условие мероморфности $\rightsquigarrow f^*(q) = \sum_{n \geq N_0} a_n q^n$ в окр-ти 0

$\boxed{\text{Опр.}}$ <u>Модулярной формой</u> уровня N и веса $2k$ называется голоморфная функция $f(z)$ на $\mathbb{H}$ такая, что

а) $f(\alpha z) = (cz+d)^{2k} f(z)$ для $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$

в) f голоморфна в параболических точках

Отношение двух модулярных форм одинакового веса и уровня N есть модулярная функция уровня N.

$\boxed{\S}$ От римановых поверхностей к комплексным кривым

$f(x, y)$ — плоская аффинная алгебраическая кривая

$\uparrow$

$k[x, y]$, $\quad k \subseteq \mathbb{C}$

Предполагаем, что f неприводим.

f называется <u>неособой</u>, если $\begin{cases} f = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ не имеет решений над $\mathbb{C}$

$\boxed{\text{Пример}}$ $y^2 = 4x^3 - ax - b$ неособа $\Leftrightarrow \Delta = a^3 - 27b^2 \neq 0$

$\boxed{\text{Предложение}}$ Пусть C — неособая плоская аффинная алгебраическая кривая над $\mathbb{C}$. Тогда $C(\mathbb{C})$ имеет естественную структуру римановой поверхности.

Док-во $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ в точке $\rightsquigarrow$ по т. о неявной функции можно спроектировать $(x,y) \longmapsto x$ и получить параметризацию. Если $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, то $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$

$\boxed{\text{Предложение}}$ $\forall$ компактная р.п. S имеет вид $C(\mathbb{C})$ для некоторой неособой проективной кривой C.
Такая C единственна с точностью до изоморфизма
Более того, рац функции на $C \longleftrightarrow$ мероморфные функции на S

- компактность существенна: $\mathbb{H}$ не приходит ни из какой кривой

$\boxed{\text{Замечание}}$ об арифметике:
$X(N)$ — алгебр. кривая над $\mathbb{C}$
На самом деле, $X(N)$ уже является алгебраической кривой над $\mathbb{Q}[\zeta_n]$, где $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$

$\boxed{\S}$ Эллиптические кривые

k — поле, $\operatorname{char} k \neq 2, 3$

$$y^2 z = 4x^3 - a x z^2 - b z^3$$ — проективная кривая $\rightsquigarrow E$

предполагаем $\Delta = a^3 - 27b^2 \neq 0$

— это <u>эллиптические кривые</u>

$c \neq 0 \rightsquigarrow$ $x \longmapsto x/c^2$ и все $\cdot c^6$

$y \longmapsto y/c^3$

$$\rightsquigarrow \quad y^2 z = 4x^3 - ac^4 x z^2 - bc^6 z^3$$

$j(E) = 1728 a^3/\Delta$

$\boxed{\text{Предложение}}$ Над а.з. полем k функция $j(E)$ есть полный инвариант классов изоморфизма эллиптических кривых, т.е.

$$E \cong E' \Leftrightarrow j(E) = j(E')$$

$\boxed{\S}$ Эллиптические функции

$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ω_1, ω_2 лин. независимы над $\mathbb{R}$

пусть $\operatorname{Im} \omega_2/\omega_1 > 0$

$\mathbb{C}/\Lambda$ — тор

имеет естественную комплексную структуру, пришедшую с $\mathbb{C}$

Опр. Мероморфная функция на торе $\mathbb{C}/\Lambda$ называется <u>эллиптической функцией</u>

$\Leftrightarrow$ дважды периодическая мероморфная ф-ция на $\mathbb{C}$.

Пример $\wp$ — функция Вейерштрасса:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq 0}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

$$z \longmapsto (\wp'(z) : \wp(z) : 1)$$

$$\mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

изоморфизм римановых поверхностей между

$\mathbb{C}/\Lambda$ и $E(C)$, где $C: y^2 z - 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3$

$$g_2 = 60 \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq 0}} \lambda^{-4}$$

$$g_3 = 140 \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq 0}} \lambda^{-6}$$

§ Эллиптические кривые и модулярные кривые

$\Lambda \longmapsto E(\Lambda)$

решетка — эллиптическая кривая

Когда для различных решеток Λ и Λ' кривые $E(\Lambda)$ и $E(\Lambda')$ совпадают?

Если $\exists c \in \mathbb{C}^* : \Lambda' = c\Lambda$ — изоморфизм, то это так

$\rightsquigarrow$ м. считать, что $\Lambda = \Lambda[\tau] = \mathbb{Z}\cdot 1 + \mathbb{Z}\cdot\tau$

где $\tau = \omega_2/\omega_1 \in \mathbb{H}$

$$\Lambda(\tau) = \Lambda(\tau') \Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

т.е. $\exists$ $\tau \longmapsto E(\tau)$

$\mathbb{H} \longrightarrow \{\text{эллипт. кривые над } \mathbb{C}\}/\cong$

$\rightsquigarrow \exists$ инъекция $\Gamma(1)\backslash\mathbb{H}$ в $\{$мн-во эллипт. кривых над $\mathbb{C}\}/\cong$

$\tau \longmapsto j(E(\tau))$

$\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$

это отображение голоморфно и имеет простой полюс в $\overset{q}{\underset{\shortparallel}{}}0$

$q = e^{2\pi i z}$ $\qquad j(q) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots$

j — модулярная функция на $SL_2(\mathbb{Z})$

$j : Y(1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$

$\rightsquigarrow$ любая эллипт. кривая над $\mathbb{C}$ изоморфна кривой вида $E(\tau)$ (модулярна)

$\Gamma(1)\backslash\mathbb{H} \longleftrightarrow (\text{эллипт. кривые} / \mathbb{C})/\cong$

Замечание Точки на торе можно складывать ⤳ точки на эллипт. кривой можно складывать: это абелева группа

Предложение Следующие категории эквивалентны:

1) Объекты = (элл. кривые)$/\simeq$

Морфизмы = (морфизмы кривых (как в алг. геометрии) + гомоморфизмы групп)

2) Объекты = р.п. рода 1 + выбранная точка O

Морфизмы = голоморфные отображения, сохраняющие O.

3) Объекты = решетки $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$

Морфизмы: $\mathrm{Hom}(\Lambda, \Lambda') = \{\alpha \in \mathbb{C}^* : \alpha\Lambda \subseteq \Lambda'\}$

---

(3) $\Rightarrow$ (2)

$\Lambda \longmapsto \mathbb{C}/\Lambda$

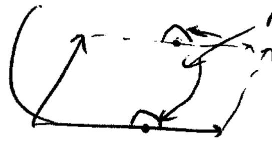
(1) $\Rightarrow$ (2)

$(E, O) \longmapsto (E(\mathbb{C}), O)$

Глава I | Эллиптические функции

§ Свойства

Предложение 1 Целая эллипт. функция = const

( можно обойти полюса и нули — параллелограмм периодов)

Док-во: $\exists M \; |f(z)| \leq M \to$ т. Лиувилля $\square$

Предложение 2 Пусть ▱ не имеет нулей и полюсов на границе, f — эллипт. функция $\Rightarrow \sum$ вычетов f внутри ▱ $= 0$

Док-во: $\sum$ вычетов $= \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial▱} f(z)\,dz = 0$ $\square$

Предложение 3 P = ▱ без 0 и полюсов на границе. Пусть a_i = ~~точки~~ координаты всех нулей и полюсов внутри P, m_i = их порядки.

Тогда $\sum m_i = 0$ и $\sum m_i a_i = 0 \pmod{\Lambda}$

Док-во $\sum_{P} m_i = \sum_{P} \operatorname{Res} \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ ← периодичность

$$\sum m_i a_i = \sum_{P} \operatorname{Res}\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \underbrace{\int_{\alpha+\omega_2}^{\alpha+\omega_1+\omega_2} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz}_{\displaystyle \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} (u+\omega_2) \frac{f'(u)}{f(u)} du} =$$

$u = z + \omega_2$

$$= -\omega_2 \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} \frac{f'(u)}{f(u)} du = -\omega_2 \ln f(z) \Big|_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} =$$

$$= 2\pi i \cdot k \omega_2$$

□

Функция Вейерштрасса

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Delta}{}' \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\lambda \in \Delta} (z-\lambda)^{-3}$$ – дважно периодична

$\rightsquigarrow \wp(z+\omega_i) - \wp(z) = \text{const}$

$\downarrow z \mapsto -\frac{1}{2}\omega_i$

$$\wp\left(\tfrac{1}{2}\omega_i\right) = \wp\left(-\tfrac{1}{2}\omega_i\right) + C$$

$\wp$ – четная $\Rightarrow C = 0$

Лемма $\forall c$ ур-ние $\wp(z) = c$ имеет ровно 2 решения

Док-во Рассмотрим $(\wp(z) - c)$ + предложение 3 □

Более того, если z_0, z_1 – эти решения, то $z_0 + z_1 = 0 \pmod{\Delta}$

$\boxed{\text{Утверждение}}$ $\forall$ эллиптическая функция есть рац. ф-ция от $\wp$ и $\wp'$

Док-во ① $\forall$ ф-ция есть сумма четной и нечетной

② $\dfrac{\text{нечетная}}{\wp'}$ = четная $\rightsquigarrow$ м. считать что наша функция четна.

③ Список нулей и полюсов f: $(z_0, m_0), (z_1, m_1), \ldots$ $\leftarrow$ ~~счит~~ считаем что $z_i \in \Delta$

если $z_i = \omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1+\omega_2)/2$

то вместо m_i напишем $m_i/2$

$$\varphi(z) = \prod_i (\wp(z) - \wp(z_i))^{m_i}$$

Тогда f/φ не имеет 0 и ∞ кроме, возможно, в 0

$\rightsquigarrow$ в 0 у нее тоже нет особенностей

$\rightsquigarrow$ $f/\varphi = \text{const}$ $\rightsquigarrow$ $f = C\cdot\varphi(z)$ $\leftarrow$ многочлен от $\wp(z)$ $\square$

Дифф. уравнение для $\wp(z)$

$(\wp'(z))^2$ имеет шестикратный полюс в 0

и двукратные нули в точках $\omega_1/2, \omega_2/2, \omega_1+\omega_2/2$

$\wp(\omega_1/2) =: e_1$

$\wp(\omega_2/2) =: e_2$ $\rightsquigarrow$ по лемме e_1, e_2, e_3 попарно различны

$\wp((\omega_1+\omega_2)/2) =: e_3$

$\boxed{\text{Утверждение}}$ $(\wp'(z))^2 = c(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)$

Док-во – смотри док-во пред. утверждения $\square$

+ можно д-ть, что $c=4$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = 1+2x+3x^2+\ldots$$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda}{}' \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda}{}' \left(\frac{1}{\lambda^2}\left(1+2\frac{z}{\lambda}+3\frac{z^2}{\lambda^2}+\ldots\right) - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \ldots$$

где $G_k = \sum{}' \frac{1}{\lambda^k}$

$\rightsquigarrow$ $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \ldots$

$\wp^2(z) = z^{-4} + 6G_4 + \ldots$

$\wp^3(z) = z^{-6} + 9G_4 z^{-2} + 15G_6 + \ldots$

$(\wp'(z))^2 = 4z^{-6} - 24G_4 z^{-2} - 80G_6 + \ldots$

$\rightsquigarrow$ $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$

где $g_2 = 60G_4$

$g_3 = 140G_6$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $e_1+e_2+e_3=0$

$e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1 = -g_2/4$

$e_1e_2e_3 = g_3/4$

$\rightsquigarrow$ $g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2 \neq 0$

$\boxed{\text{Упр.}}$ $\wp'' = 6\wp^2 - g_2/2$

$\wp''' = 12\wp'\wp$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Сложения

$$\wp(z_1+z_2) = -\wp(z_1) - \wp(z_2) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z_1)-\wp'(z_2)}{\wp(z_1)-\wp(z_2)}\right)^2$$

— Это очень редкое свойство:
им обладают эллиптические функции,
рац. функции и экспоненты
(Вейерштрасс)