С. Ягунов

§ Эллиптические интегралы

$$\left(\frac{d\wp}{dz}\right)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

$$\downarrow$$

$$\int dz = \int \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}}$$

$$\downarrow$$

$$z = \int \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}} = \wp^{-1}(u) \text{ — обратная к функции Вейерштрасса}$$

Эллиптический интеграл: $\int R(x, \sqrt{G(x)})\,dx$,

где $G(x)$ — полином третьей (или четвертой) степени без кратных корней

т. Лежандра:

Пусть $I = \int R(x,y)\,dx$,

$y^2 = a_4x^4 + a_3x^3 + \ldots + a_0$,

a_4 или $a_3 \neq 0$

Тогда I есть линейная комбинация рац. функций и

$$\int \frac{dx}{y},\quad \int \frac{x\,dx}{y},\quad \int \frac{x^2dx}{y},\quad \int \frac{dx}{(x-c)y}$$

(форма Вейерштрасса)

Форма Лежандра

$$y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2) = G(x)$$

$$4x^3 - g_2x - g_3 \xrightarrow{x' = ax+b} x(x-1)(x-k^2)$$

$$\Big\downarrow\ \xi^2 = x^{-1},\ \eta^2 = y^2x^{-3}$$

$$\eta^2 = (1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{G(x)}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{G(x)}} \text{ — сводится к элементарным функциям}$$

(эллипт. интеграл I рода)

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{G(x)}} \rightsquigarrow \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

– эллиптический интеграл II рода

$$\int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{G(x)}} \rightsquigarrow \int \frac{d\varphi}{(\sin\varphi - c)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

– эллиптический интеграл III рода

(см. Курант – Гурвиц, Теория функций)

Математический маятник:

$$\ddot{x} + \sin x = 0$$

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\sin x = 0$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2}(\dot{x})^2 - \cos x = E \quad \text{(aka закон сохранения энергии)}$$

$$\to t = \int \frac{dx}{\sqrt{2E + \cos x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1^{2E} - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$$ – эллипт. интеграл I рода

Вычисление дуги эллипса $\rightsquigarrow$ эллипт. интеграл II рода

$a, b > 0$

$\downarrow$

$\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}$

итерируем этот процесс.
Чему равен предел?
– интегральное преобразование!
– метод табулирования эллиптических интегралов.

Глава | Модулярные формы

§ Модулярная группа

$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$ – на этом действует $SL_2(\mathbb{R})$:

$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$. Если $g \in SL_2(\mathbb{R})$, то

$$\operatorname{Im}(gz) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} \rightsquigarrow SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}$$

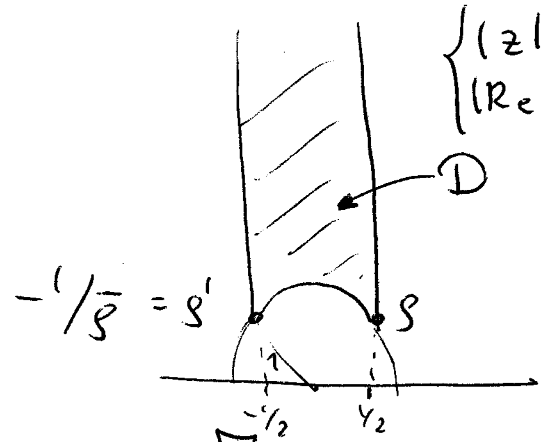
(на самом деле, действует $PSL_2(\mathbb{R})$)

образ

$SL_2(\mathbb{Z}) = \Gamma(1)$

$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad S^2 = 1, \ (ST)^3 = 1$

$Sz = -1/z \qquad Tz = z+1$



$\begin{cases} |z| \geq 1 \\ |Re(z)| \leq 1/2 \end{cases}$

Теорема 1 ① $\forall z \in \mathbb{H} \ \exists g \in \Gamma(1): \ gz \in \mathcal{D}$

② $z, z' \in \mathcal{D}, \exists g: \ gz = z' \Rightarrow \begin{cases} z = z' \pm 1 \\ Re\, z = \pm 1/2 \end{cases}$ или $\begin{cases} |z| = 1 \\ z' = -1/z \end{cases}$

③ $z \in \mathcal{D} \rightsquigarrow Stab_{\Gamma(1)}(z) = \begin{cases} \langle S \rangle, & z = i \\ \langle ST \rangle, & z = \rho = e^{2\pi/6} \\ \langle TS \rangle, & z = \rho' = -1/\bar{\rho} \\ e, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$

Теорема 2 $\Gamma(1)$ порождена S и ST

Замечание $\Gamma(1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Док-во Т1

$G = \langle S, T \rangle \leq \Gamma(1)$

Покажем, что $\forall z \in \mathbb{H} \ \exists g \in \Gamma(1): \ gz \in \mathcal{D}$

$Im\, gz = \dfrac{Im\, z}{|cz+d|^2} \rightsquigarrow \forall const \ \exists$ конечное число

$c, d \in \mathbb{Z}$ таких g, что $|cz+d| < const$

$\rightsquigarrow$ для нашего z выберем g так, что $Im(gz)$ максимальна

сдвигами м. добиться, что $|Re(z)| \leq 1/2$,

потом при необходимости отражение.

Пусть теперь $gz = z'$, $z, z' \in \mathcal{D}$ $\quad Im\, gz \geq Im\, z \to |cz+d| \leq 1$.

м. считать

$\to$ далее перебор. $\square$

Док-во Т2: пусть $z_0 \in \mathrm{Int}(\mathcal{D})$, $g \in \Gamma(1)$

$z := g z_0 \rightsquigarrow \exists g' \in G : g'z \in \mathcal{D} \xrightarrow{\text{т.1}} g'z = z_0 \rightsquigarrow g = (g')^{-1} \in G$ $\square$

Какие фунд. области у действия $\Gamma(N) \curvearrowright \mathbb{H}$?

$$0 \longrightarrow \Gamma(N) \longrightarrow \Gamma(1) \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

- при желании их можно нарисовать (и сделать связными)

§ Модулярные функции

Опр. $k \in \mathbb{Z}$. Слабо модулярная функция веса k — мероморфная функция f на $\mathbb{H}$ такая, что $f(z) = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$ для любой $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$

$$\frac{d(gz)}{dz} = \frac{1}{(cz+d)^2} \longrightarrow \frac{f(gz)}{f(z)} = \left(\frac{d(gz)}{dz}\right)^{-k}$$

$$\longrightarrow f(gz)\big(d(gz)\big)^k = f(z)(dz)^k$$

- т.е. это $\Gamma(1)$-инвариантная дифференциальная форма

$q = e^{2\pi i z}$ $\rightsquigarrow$ $\mathbb{H}$ переходит в проколотый единичный круг

$f(z) \longrightarrow \tilde{f}(q)$ — мероморфна в круге без центра

Если $\tilde{f}$ мероморфно продолжается на весь круг, то f называется модулярной функцией веса k

Если $\tilde{f}$ голоморфна $\rightsquigarrow f(\infty) := \tilde{f}(0)$

Итак, модулярная форма — это слабо модулярная функция, голоморфно продолжающаяся ~~на бесконечность~~ в $q=0$

Параболическая модулярная форма — модулярная форма такая, что $f(\infty) = 0$ (cusp-форма)

Пример $q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$ — параболическая форма веса 12

$q - 24q^2 + 252q^3 + \ldots$

Пусть $\mathcal{L}$ — множество решеток в $\mathbb{C}$

$\wr \; \mathbb{C}/_{SL_2(\mathbb{Z})}$

На $\mathcal{L}$ действует $\mathbb{C}^*$

$$(\omega_1, \omega_2) \longmapsto (\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)$$

$$\mathcal{L}/_{\mathbb{C}^*} \simeq \mathbb{H}/\Gamma(1)$$

$F: \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}$ однородна степени $-2k$

$$F(\lambda\Lambda) = \lambda^{-2k} F(\Lambda)$$

Однородные функции на решетках степени $-2k$

$\longleftrightarrow$ модулярные формы веса $2k$

~~Лемма $\Lambda \in \mathcal{L}$ ...~~

$\boxed{\S}$ Примеры модулярных форм. Ряды Эйзенштейна

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\Lambda \in \mathcal{L} \rightsquigarrow$ ряд $\sum\limits_{\gamma\in\Lambda}{}' \frac{1}{|\gamma|^k}$ сходится при $k>2$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $G_{2k}(\Lambda) = \sum\limits_{\gamma\in\Lambda}{}' \frac{1}{\gamma^{2k}}$ $(k>1)$ — ряд Эйзенштейна

$(\omega_1, \omega_2) \longmapsto (1, \omega)$, $\omega = \omega_2/\omega_1 \in \mathbb{H}$

$$\rightsquigarrow G_{2k}(z) = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(mz+n)^{2k}}$$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $k>1$, $G_{2k}(\infty) = 2\zeta(2k)$ $\left(= \sum' \frac{1}{n^{2k}}\right)$

$$g_2 = 60\, G_2, \quad g_3 = 140\, G_3$$

$$g_2(\infty) = 120\zeta(4) = \frac{4}{3}\pi^4 \qquad g_3(\infty) = 280\zeta(6) = \frac{8}{27}\pi^6$$

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 \rightsquigarrow \Delta(\infty) = 0$$

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $k>2$ — четно, $z\in\mathbb{H}$. Тогда $G_k(z) = 2\zeta(k)\left(1 - \frac{2k}{B_k}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\right)$

где B_k — числа Бернулли: $\frac{x}{e^x-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}$ $\qquad q = e^{2\pi i z}$

Док-во

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

$\downarrow$ — логарифмическая производная

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) \qquad (*)$$

$q = e^{2\pi i z}$, $z \in \mathbb{H}$

$$\rightsquigarrow \pi \operatorname{ctg}(\pi z) = \pi i \frac{q+1}{q-1} = \pi i + \frac{2\pi i}{q-1} = $$

$$= \pi i - 2\pi i \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu} \qquad (**)$$

Продифференцируем эти равенства по z k раз:

$$(-1)^{k-1}(k-1)! \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^k} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} (2\pi i)^k \nu^{k-1} q^{\nu}$$

$$G_k(z) = \sum_{(m,n)}{}' \frac{1}{(mz+n)^k} = 2\zeta(k) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} =$$

$$= 2\zeta(k) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2\pi i)^k \nu^{k-1}}{(k-1)!} q^{m\nu} =$$

$$= 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

Лемма $2\zeta(k) = -\frac{B_k}{k!}(2\pi i)^k$, k — четно, $k>0$ □

Вместо G_k удобно рассматривать $E_k(z) = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k(z)$

§ Размерность пространства модулярных функций

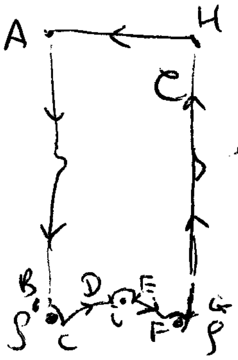
Пусть $f \neq 0$ — модулярная функция веса k

$\nu_p(f)$ — порядок нуля в точке p, $\nu_\infty(f)$ — порядок полюса в ∞

Теорема $$\nu_\infty(f) + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\rho(f) + \sum_{\substack{p\in D,\\ p\neq i,\rho}} \nu_p(f) = k/12$$

(см. теорему Римана — Роха!)

Док-во



обрежем область сверху → там нет особенностей, кроме ∞.

обойдем нули и полюса на границе

$$\int_C \frac{f'}{f}\,dz = \underbrace{\nu_\infty(f)}_{=\int_{HA}} + \underbrace{\frac{1}{2}\nu_i(f)}_{=\int_{DE}} + \underbrace{\frac{1}{3}\nu_\rho(f)}_{\int_{BC+FG}}$$

$$\int_{AB} + \int_{GH} = 0$$

$$\int \frac{f'}{f} = \int_{\substack{\text{дуга}\\ \text{вокруг}\\ a}} \frac{m}{z-a} + \text{голом. часть} \to m i\Theta$$

угол дуги

$$\int_{CD} + \int_{EF}$$

осталось доказать, что это $= (2\pi i)\cdot k/12$

Лемма $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$, $c \neq 0$

$f(z)$ мероморфна на $\mathbb{H}$ без 0 и ∞ на контуре,

$f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)$

тогда
$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \int_{\gamma C} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = -k\int_C \frac{dz}{z + d/c}$$

Док-во Леммы: $f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)$

$$f'(\gamma z)\frac{d(\gamma z)}{dz} = (cz+d)^k f'(z) + kc(cz+d)^{k-1} f(z)$$

$$\rightsquigarrow \frac{f'}{f}\,d(\gamma z) = \frac{f'}{f}\,dz + k\frac{c\,dz}{cz+d}$$ □

Продолжение док-ва Теоремы

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{1}{2\pi i}\int \frac{dz}{z} = \int_{1/3}^{1/4} d\Theta = -1/12$$

$z = e^{2\pi i\Theta}$ □

Теорема k — четное, M_k — пространство модулярных форм веса k

S_k — пространство параболических форм веса k

a) $M_0 = \mathbb{C}$

b) $M_k = 0$ при $k<0$ или $k=2$

c) $\dim M_k = 1$ и M_k порождено E_k при $k = 4, 6, 8, 10, 14$

d) $S_k = 0$, $k<12$ или $k=14$; $S_{12} = \mathbb{C}\Delta$
если $k>14$, то $S_k = \Delta M_{k-12}$

e) $M_k = S_k \oplus \mathbb{C}E_k$, $k>2$

Док-во: перебор с использованием предыдущей теоремы □

Следствия $E_4^2 = E_8$, $E_4 E_6 = E_{10}$

$$E_4 = (1 + 240 \sum \sigma_3(n) q^n)$$

$$E_6 = (1 - 504 \sum \sigma_5(n) q^n)$$

$$E_8 = (1 + 480 \sum \sigma_7(n) q^n)$$

$$E_{10} = (1 - 264 \sum \sigma_9(n) q^n)$$

$\rightsquigarrow$ например, $\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m) \sigma_3(n-m)$

или $11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m) \sigma_5(n-m)$