$$\Delta = g_4^3 - 27 g_6^2 \in S_{12}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Якоби)

$$\Delta = (2\pi)^{12} q \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$$

Док-во. Понятно, что Δ инвариантно отн-но $z \longmapsto z+1$

Пусть $F(z) = q \prod (1-q^n)^{24}$, $q = e^{2\pi i z}$

Тогда покажем, что $z^{12} F(z) = F(-\frac{1}{z})$

$$G_1(z) := \sum_n {\sum_m}' \frac{1}{(m+nz)^2} \qquad H_1(z) = \sum_n {\sum_m}' \frac{1}{(m-1+nz)(m+nz)}$$

$$G(z) := \sum_m {\sum_n}' \frac{1}{(m+nz)^2} \qquad H(z) = \sum_m {\sum_n}' \frac{1}{(m-1+nz)(m+nz)}$$

$$\frac{1}{(m-1+nz)(m+nz)} = \frac{1}{m-1+nz} - \frac{1}{m+nz} \rightsquigarrow H_1(z) = 2$$

Кроме того, $H(z) = 2 - \frac{2\pi i}{z}$

$$\sum\sum\left(\frac{1}{(m-1+nz)(m+nz)} - \frac{1}{(m+nz)^2}\right) \text{ — абсолютно сходится}$$

$$\rightsquigarrow G_1 - H_1 = G - H$$

$$\rightsquigarrow G_1(z) - G(z) = \frac{2\pi i}{z}$$

$$\rightsquigarrow G_1(-1/z) = z^2 G(z) = z^2 G_1(z) - 2\pi i z$$

$$G_1(z) = \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2 \sum \sigma_1(n) q^n \qquad (**)$$

$$\frac{dF}{F} = \frac{dq}{q}\left(1 - 24 \sum_{m,n=1}^{\infty} n q^{nm}\right)$$

$$= \frac{dq}{q}\left(1 - 24 \sum \sigma_1(n) q^n\right) \qquad (***)$$

$$\rightsquigarrow \frac{dF(-1/z)}{d(-1/z)} = \frac{dF}{dz} + 12\frac{dz}{z}$$

$\rightsquigarrow F(-1/z)$ и $z^{12}F(z)$ имеют одинаковую лог.производную

$$\rightsquigarrow F(-\tfrac{1}{z}) = k z^{12} F(z) \xrightarrow{z=i} k = 1 \qquad \square$$

$$\Delta = (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24} = \sum \tau(n) q^n$$

функция Рамануджана

n	$\tau(n)$
1	1
2	−24
3	252
4	−1472

$\tau(n) = O(n^6)$

$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$, если $\gcd(m,n) = 1$

$\tau(p^{n+1}) = \tau(p)\tau(p^n) - p^{11}\tau(p^{n-1})$

для простого p

$L_\tau(s) = \sum \tau(n) n^{-s}$ — сходится в $\{Re(s) > ?\}$

ряд Дирихле

$$\rightsquigarrow L_\tau(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}}$$

$$\Lambda(s) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s) L_\tau(s)$$

$$\rightsquigarrow \Lambda(s) = \Lambda(12-s)$$

Гипотеза Рамануджана:

$$|\tau(n)| < n^{11/2} \cdot \sigma_0(n)$$

Гипотеза Лемера:

$$\forall n \quad \tau(n) \neq 0$$

$E_{12} - E_6^2 = c\Delta$, где $c = (2\pi)^{-12} \cdot 2^6 \cdot 3^5 \cdot 7^2 / 691$

$\tau(n)$ — функция от σ_{11} и σ_5

$$\rightsquigarrow \tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$$

§ Операторы Гекке

$\mathcal{X}$ — множество, $\mathbb{Z}[\mathcal{X}]$ — свободная аб. группа

Опр. Соответствие на $\mathcal{X}$ — это $T: \mathbb{Z}[\mathcal{X}] \to \mathbb{Z}[\mathcal{X}]$ гомоморфизм

т.е. $T(x) = \sum_{y \in \mathcal{X}} n_y(x) \cdot y$, $\underset{\mathbb{Z}}{n_y(x)} = 0$ для почти всех y

F — числовая функция на $\mathcal{X}$ $\rightsquigarrow$ определена TF

$\mathcal{L}$ — мн-во всех решеток в $\mathbb{C}$

$n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow T(n)$ — соответствие, которое переводит решетку в сумму всех подрешеток индекса n

$[\Gamma : \tilde{\Gamma}] = n \rightsquigarrow \tilde{\Gamma} \supset n\Gamma$; $\Gamma / n\Gamma = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$

$\rightsquigarrow$ подрешеток индекса n конечное число.

$\lambda \in \mathbb{C} \rightsquigarrow R_\lambda : \Gamma \longmapsto \lambda\Gamma$ — подобная решетка

① $R_\lambda R_\mu = R_{\lambda\mu}$

② $R_\lambda T(n) = T(n) R_\lambda$

③ $T(m)T(n) = T(mn)$, если $\gcd(m,n) = 1$

④ $T(p^n)T(p) = T(p^{n+1}) + p \cdot T(p^{n-1}) R_p$, если p — простое.

Пусть $F : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}$ — однородная веса $2k$

т.е. $R_\lambda F = \lambda^{-2k} F$

Пусть $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow R_\lambda(T(n)F) = T(n)R_\lambda(F) = \lambda^{-2k}(T(n)F)$

$\rightsquigarrow T(n)F$ — тоже однородная веса $2k$.

$T(n)$ называется <u>оператором Гекке</u>

$\boxed{\text{Лемма}}$ $S_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, \begin{matrix} ad = n \\ a \geq 1 \end{matrix} \quad 0 \leq b < d \right\}$

$\sigma \in S_n \rightsquigarrow \Gamma_\sigma$ — подрешетка в Γ, полученная воздействием σ на базис решетки Γ

$\sigma \longmapsto \Gamma_\sigma$

— биекция между S_n и мн-вом подрешеток индекса n в Γ

$\boxed{\text{Следствие}}$ $f(z)$ — модулярная форма веса $2k$

$$T(n)f(z) = n^{2k-1} \sum_{\substack{a \geq 1 \\ ad = n \\ 0 \leq b < d}} d^{-2k} f\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

$\boxed{\text{Следствие } 2}$ $f(z) = \sum c(m) q^m$

$\rightsquigarrow T(n) f(z) = \sum \gamma(m) q^m$, где

$$\gamma(m) = \sum_{\substack{a \mid (m,n) \\ a \geq 1}} a^{2k-1} c(mn/a^2)$$

$\boxed{\text{Следствие } 2'}$ $\gamma(0) = \sigma_{2k-1}(n) c(0)$

$\gamma(1) = c(n)$

$\downarrow n = p$ – простое

$\boxed{\text{Следствие } 2''}$ $\gamma(m) = \begin{cases} c(pm), & \text{если } p \nmid m \\ c(pm) + p^{2k-1} c(m/p), & \text{если } p \mid m \end{cases}$

Собственные функции операторов Гекке

$f = \sum c(n) q^n$ – веса $2k$

Пусть f – собственная функция всех операторов $T(n)$,

т.е. $\exists \lambda(n)$: $T(n) f = \lambda(n) \cdot f$

$\boxed{\text{Теорема}}$ У такой функции $c(1) \neq 0$;

если f <u>нормализованная</u> ($c(1) = 1$), то $c(n) = \lambda(n)$ $\forall n \geq 1$

<u>Док-во</u> $\gamma(1) = c(n)$, $\gamma(1) = \lambda(n) c(1)$ $\rightsquigarrow c(n) = \lambda(n) c(1)$ $\forall n$

$\square$

$\boxed{\text{Следствие}}$ Пусть f – форма веса $2k$ (нормализованная),

f – собственная функция операторов Гекке

Тогда

① $c(m) c(n) = c(mn)$, $\gcd(m,n) = 1$

② $c(p) c(p^n) = c(p^{n+1}) + p^{2k-1} c(p^{n-1})$, где p – простое

Построим по f ряд Дирихле $\Phi_f(s) = \sum c(n) n^{-s}$

Он сходится при $Re(s) > 2k$

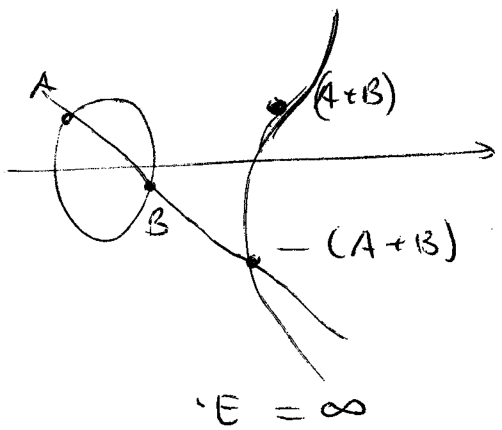
и $\Phi_f(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - c(p) p^{-s} + p^{2k-1-2s}}$

G_{2k} — собственная функция операторов Гекке
с собственными значениями $\lambda(p) = p^{2k-1}(1+p^{1-2k})$
— отсюда следуют всякие соотношения для $\tau(n)$

$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ → неособая кубика = тор
род плоской кривой

→ на торе можно складывать точки
Там есть точки конечного порядка n: это $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$

Над $\mathbb{C}$:

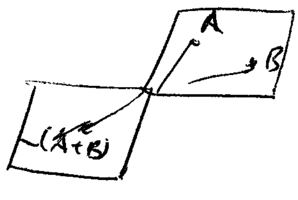


$\wp'(z) = \alpha \wp(z) + \beta$ — ур-ние прямой

$\varphi(z) = \wp'(z) - \alpha \wp(z) - \beta$

у нее полюс третьего порядка в $z=0$

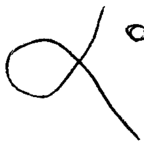
→ у нее 3 нуля;
2 из них = наши точки A, B



Σ нулей $\equiv \Sigma$ полюсов

- нужно подправить для кратных точек
- нужно перенести на любое(?) поле: написать формулы

$$y^2 = x(x-1)(x-a)$$



$a=1 \rightsquigarrow \mathbb{G}_m = (\mathbb{R}^*, \cdot)$

$$y^2 = x^3$$

$\rightsquigarrow \mathbb{G}_a \cong (\mathbb{R}, +)$

Как проверить ассоциативность сложения точек?

$\boxed{\text{„Теорема"}}$ Пусть C_0, C_1, C_2 — три кубики

Пусть есть 8 точек в общем положении, в которых они пересекаются $\rightsquigarrow$ $\exists$ девятая точка, в которой они пересекаются.

<u>Док-во:</u> У кубики 9 (10) проективных параметров, каждая точка уменьшает размерность на 1 $\rightsquigarrow$ $C_2 = \alpha C_0 + \beta C_1 \rightsquigarrow C_2$ проходит через общую точку C_0 и C_1. $\square$

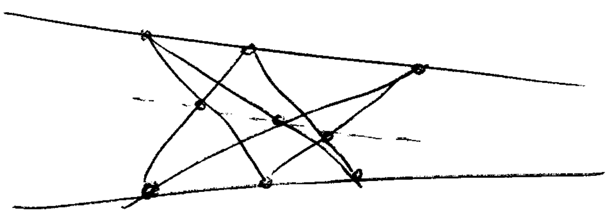
$$\begin{aligned} p_1 &= AC & q_1 &= AB \\ p_2 &= E(A+B) & q_2 &= E(A+C) \\ p_3 &= B(A+C) & q_3 &= C(A+B) \end{aligned}$$

$\underbrace{p_1 \, p_2 \, p_3}_{\text{выр. кубика}}$ $\qquad$ $\underbrace{q_1 \, q_2 \, q_3}_{\text{выр! кубика}}$

$\longrightarrow$ девятая точка $A+(B+C) = (A+B)+C$

<u>Теорема Паскаля</u> Шестиугольник вписан в конику $\longrightarrow$ т. пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой.

<u>Теорема Паппуса</u>



§ Точки на $E(\mathbb{Q})$

$$E(\mathbb{Q}) = E(\mathbb{Q})_{tors} \oplus \mathbb{Z}^{R_E}$$

Теорема Следующие утверждения равносильны:

1. n — конгруэнтное число
2. $\exists x \in \mathbb{Q}$: $x, x+n, x-n$ — квадраты в $\mathbb{Q}$
3. На кривой $y^2 = x^3 - n^2 x$ $\exists$ рац. точка: $x \in \mathbb{Q}^2$, знаменатель y четный, числитель y вз. прост с X

3'. $\mathrm{rk}\,(y^2 = x^3 - n^2 x) > 0$

Теорема (Морделла) $\mathrm{rank}\, E < \infty$

Опр. E — эллипт. кривая над $\mathbb{Q}$

p — простое, $p \mid \Delta \to E$ имеет плохую редукцию в p

$$L(E,s) = \prod_{p \mid \Delta} \frac{1}{1 - a_p p^{-s}} \cdot \prod_{p \nmid \Delta} \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}}$$

$$a_p = p + 1 - N_p$$

N_p — число точек в $E(\mathbb{F}_p)$

$\exists N$:

$$\Lambda(E,s) := N^{s/2} (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(E,s)$$

$$\Lambda(E,s) = \pm \Lambda(E, 2-s)$$

Гипотеза (Берча — Суиннертона-Даера)

E — эллипт. кривая над $\mathbb{Q} \to \mathrm{rk}(E)$ равен порядку нуля ~~...~~ $\Lambda(E,0)$.

Кручение охарактеризовать проще:

Барри Мазур, 1976 : $E_{tors}(\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \text{ где } m \le 10 \text{ или } m = 12 \\ \text{или} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}, \quad n \le 4 \end{cases}$

$\boxed{\text{Гипотеза}}$ Танияма — Вейля

$\forall E/\mathbb{Q}$ модулярна

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \,(N) \right\}$$

$$\mathbb{H}/\Gamma_0(N) \rightsquigarrow X_0(N) \text{ — компактная}$$

$$\downarrow \text{ — накрытие}$$

$$X(1) \text{ — риманова сфера}$$

Каков род $X_0(N)$?

$$g = \begin{cases} 0, & \text{для } N \le 10 \\ 1, & \text{для } N = 11, 14, 15, 17, 19 \\ 2, & \text{для } N = 22, 23, 26, \ldots \end{cases}$$

При этих N $X_0(N)$ — тор

$X_0(N)$ бигололоморфен некоторой элл. кривой

Кривая, для которой $\exists N : X_0(N)$ ей бигололоморфна, называется <u>модулярной</u> уровня N

Слабая гипотеза Танияма—Вейля:

<u>полустабильная</u> элл. кривая над $\mathbb{Q}$ модулярна

(редукция по любому p не имеет узла

Пусть $a^\ell + b^\ell = c^\ell$

$\rightsquigarrow y^2 = x(x - a^\ell)(x - c^\ell)$ — элл. кривая

$\Delta = 16 a^\ell b^\ell c^\ell$

если она модулярна $\rightsquigarrow$ ей соотв. мод. форма отн-но $\Gamma_0(N)$

(Рибет) по ней можно построить мод. форму отн-но

$\xrightarrow{} \Gamma_0(2)$ — а таких (ненулевых) не бывает

↑ операторы Гекке

- Milne — лекции
- Коблиц
- Ленг
- Прасолов — Соловьев