Слайсы в мотивной K-теории

26.12.2013

Г. Гаркуша

$Sm/k \xrightarrow{F} SSets_*$ $\quad$ $Pre(Sm/k)$

Sp^Σ $\quad$ $Pre^\Sigma(Sm/k)$

$X \longmapsto F(X)$ $\quad$ предпучки симметрических спектров – симм. моноид. категория

наивная модельная структура:

proj: $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ = слаб. экв-сть в $Pre^\Sigma(Sm/k)$, если $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$ – стабил. экв-сть в Sp^Σ

$\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ – fib, если $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$ – рассл. в Sp^Σ

Далее – Bousfield localisation:

$X \longmapsto \Sigma^\infty X_+ = (X_+, S^1 \wedge X_+, \ldots)$

Пусть
$$\begin{array}{ccc} U' & \hookrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & X \end{array}$$
– элем. квадрат Нисневича Q:
$$\begin{array}{ccc} \Sigma^\infty U'_+ & \longrightarrow & \Sigma^\infty X'_+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^\infty U_+ & \longrightarrow & \Sigma^\infty X_+ \end{array}$$

– хочется, чтобы он стал гомотопически кодекартовым

$\rightsquigarrow P_Q \longrightarrow \Sigma^\infty X_+$ хочется сделать слабой экв-стью
кофибрантный
(корасслоения те же, расслоений меньше)

$\rightsquigarrow$ получаем Pre^Σ_{Nis}

$\Sigma^\infty X \times \mathbb{A}^1_+ \longrightarrow \Sigma^\infty X_+$ в $Pre^\Sigma_{Nis} \rightsquigarrow Pre^\Sigma_{Mot}$

– тоже делаем слаб. экв. $\quad SH^{S^1}_{Nis}$ $\quad SH^{S^1}(Sm/k)$

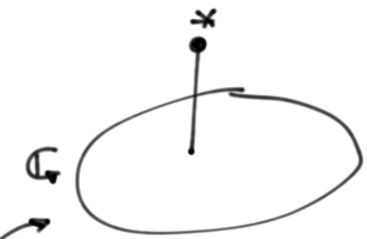
$$Pre^{\Sigma}(Sm/k)\times Pre(Sm/k) \longrightarrow Pre^{\Sigma}(Sm/k)$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Spec}\,k)_+ = pt \sqcup pt \arrow[r, hook, "\text{не cofib!}"'] \arrow[d] & \mathbb{G}_{m+} = (\mathrm{Spec}\,k[t^{\pm 1}])_+ \arrow[d, "\sim"] \\
(\mathrm{Spec}\,k)_+ \wedge \Delta[1]_+ \arrow[r, hook] & \mathbb{G}
\end{tikzcd}$$

$$(\mathrm{Spec}\,k)_+ \wedge \Delta[1]_+ = (\mathrm{Spec}\,k \times \Delta[1])_+$$

$$\begin{tikzcd}
pt \sqcup pt \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d] & \mathbb{G} \arrow[d] \\
pt \arrow[r] & (\mathbb{G}, *)
\end{tikzcd}$$

„пунктированный $\mathbb{G}$"



уже кофибрантный

$$Pre^{\Sigma}(Sm/k)\times \mathbb{G}$$
$$X \longmapsto X\wedge \mathbb{G}$$

$-\wedge\mathbb{G} : Pre^{\Sigma} \longrightarrow Pre^{\Sigma}$

спускается в SH:

$-\wedge \mathbb{G}:\ SH^{S^1}(Sm/k) \longrightarrow SH^{S^1}(Sm/k)$

Nis или Mot

— хочется обратить этот эндофунктор

Стандартный пример: нужно рассматривать $\mathbb{G}$-спектры в Pre^{Σ}. Рассм. $(X_0, X_1, \ldots)$, $X_i \in Pre^{\Sigma}$, $X_i\wedge\mathbb{G} \to X_{i+1}$

$\rightsquigarrow$ получили $Pre^{\Sigma,\mathbb{G}}(Sm/k)$ — категорию би-спектров

Nis или Mot

$\rightsquigarrow$ $SH_{Nis}(k)$ и $SH(k)$ — компактно порожденная триангулированная категория по отн. к $-\wedge S^1 = -[1]$

Компактные образующие $SH(k)$:

$$\{\Sigma^{\infty}_{\mathbb{G}}\Sigma^{\infty}_{S^1} X_+[n](k)\},\quad n,k\in\mathbb{Z}$$

Пусть $X = (X_0, X_1, \dots)$ — биспектр (X_i — S^1-спектры)

$X(1) = (X_0 \wedge \mathbb{G}, X_1 \wedge \mathbb{G}, \dots)$, $X(-1) = (*, X_0, X_1, \dots)$

$\wr SH$

$(X_1, X_2, X_3, \dots)$

полная Δ-подкатегория в $SH(k)$

Пусть $k \in \mathbb{Z}$; $T_k = \langle \Sigma^\infty_{\mathbb{G}} \Sigma^\infty_{S^1} X_+[n](k) \mid n \in \mathbb{Z} \rangle$

Заметим, что $T_{k+1} \subset T_k \subset T_{k-1} \subset \dots$ и $\langle \cup T_k \rangle = SH(k)$

Каждая T_k — компактно порожденная Δ-подкат.

$\rightsquigarrow$ имеется функтор $f_k \colon SH(k) \longrightarrow T_k$

— правый сопряженный к $i_k \colon T_k \hookrightarrow SH(k)$

Пусть X — биспектр. Рассмотрим треугольник

$$f_{k+1}(X) \longrightarrow f_k(X) \longrightarrow s_k(X) \xrightarrow{+}$$

$$f_{k+1}(X) = f_{k+1}(f_k(X)) \longrightarrow f_k(X)$$

коединица

k-слайс биспектра X

Теория когомологий, представленная биспектром $\mathcal{E}$:

$$\mathrm{Hom}_{SH(k)}(\Sigma^\infty_{\mathbb{G}} \Sigma^\infty_{S^1} X_+[n](k), \mathcal{E}) = \mathcal{E}^{-n,-k}(X)$$

KGL — биспектр, представляющий K-теорию:

$$KGL^{p,q}(X), \quad X \in Sm/k$$

$$KGL^{p,q}(X) = K_{2q-p}(X)$$

K-теория Квиллена

Задача: $s_q(KGL) = ?$ Хотелось бы: $H_{\mathbb{Z}}(q)[q]$

Есть биспектр $H_{\mathbb{Z}} \in SH(k)$, предст. мотивные когомологии:

$$H^{p,q}_{\mathbb{Z}}(X) = H^{p,q}_M(X)$$

$$s_0(KGL) = H_{\mathbb{Z}}$$

Мы вычислим и $f_q(KGL)$, $q \geq 0$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & f_{k+1}(X) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & f_k(X) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & f_{k-1}(X) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \cdots \\
& & s_{k+1}(X) & s_k(X) & s_{k-1}(X)
\end{tikzcd}$$

$$Y \in SH(k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{SH(k)}(Y, s_k(X)) \Longrightarrow ?$$

хотелось бы: $\mathrm{Hom}(Y, X)$

Например:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & f_2(KGL) \arrow[r] \arrow[dr] & f_1(KGL) \arrow[r] \arrow[dr] & f_0(KGL) \arrow[dr] & \\
& & s_2(KGL) & s_1(KGL) & s_0(KGL)
\end{tikzcd}$$

Ответ:

$$\underbrace{\mathrm{Hom}(\Sigma^\infty_{\mathbb{G}_m} \Sigma^\infty_{S^1} X_+, s_q(KGL)[p-q])}_{= H^{p-q,-q}_{\mathbb{Z}}(X)} \Longrightarrow K_{-p-q}(X)$$

$f_0(KGL)$:

$$Sm/k^{op} \times Sm/k \longrightarrow Sp^{\Sigma}$$
$$(X, Y) \longmapsto K(X, Y)$$

Например: $K(X, pt) = K(X)$. Если $X = \mathrm{Spec}\, B$, $Y = \mathrm{Spec}\, A$, то $K(X, Y)$ выглядит так:

$${}_A P_B = \{A\text{-}B\text{-бимодули такие, что } P_B \in \mathrm{proj}\, B\}$$

они образуют аддитивную категорию

у нее есть спектр (например, Вальдхаузена).

Хочется строгую функториальность по X и Y + свойство:

$Z \times K(X, Y) \longrightarrow K(X \times Z, Y \times Z)$ — функториально и по Z

Хорошая модель: категория ${}_B\mathcal{P}_A$ эквивалентна категории $\{(n, f: A \longrightarrow M_n B)\} = \widetilde{\mathcal{P}}(A,B)$

└ неунитальный гомоморфизм:

$f(1)$ = идемпотент $e_f \rightsquigarrow$ получаем B-проект. модуль

морфизмы в $\widetilde{\mathcal{P}}(A,B)$:

$$\begin{tikzcd} (n, f: A \arrow[r] \arrow[d] & M_n B) \rightsquigarrow e_f \rightsquigarrow {}_A P_B \\ (k, g: A \arrow[r] & M_k B) \rightsquigarrow e_g \rightsquigarrow {}_A Q_B \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{P}}}(f,g) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P,Q)$$

функториальность: $B \xrightarrow{\alpha} B'$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & M_n B \arrow[r, "M_n(\alpha)"] & M_n B' \end{tikzcd}$$

Положим $K(\mathrm{Spec}\,B, \mathrm{Spec}\,A) := K^{\mathrm{Wal}}({}_A\widetilde{\mathcal{P}}_B)$

$\widetilde{\mathcal{P}}(A,B) \times Sm/k \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}(A \otimes_k -, B \otimes_k -)$ — бифунктор, функт. по A и B

$Z = \mathrm{Spec}\ C$

$\rightsquigarrow (A \xrightarrow{f} M_n B) \longmapsto A \otimes C \xrightarrow{f \otimes 1} (M_n B) \otimes C \cong M_n(B \otimes C)$

$\rightsquigarrow K(X,Y) \times Sm/_k \longrightarrow K(X \times -, Y \times -)$

В частности, из $pt \xrightarrow{1} \mathbb{G}_m$

$$K(X, pt) \longrightarrow K(X, \mathbb{G}_m) \longrightarrow K(X, \mathbb{G})$$

$$\begin{tikzcd} pt \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{G}_m \arrow[d] \\ \mathbb{G}_m \arrow[r, "x \mapsto (1,x)"] & \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ (x,1) \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\begin{tikzcd} K(X,pt) \arrow[r] \arrow[d] & K(X,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d] & K(X,\mathbb{G}) \arrow[d] \\ K(X,\mathbb{G}_m) \arrow[r] & K(X,\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] & K(X \times \mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}) \arrow[d] \\ & & K(X, \mathbb{G}^{\wedge 2}) \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $f_0(KGL) = (K(X, pt), K(X, \mathbb{G}^{\wedge 1}), K(X, \mathbb{G}^{\wedge 2}), \dots),$

$f_q(KGL) = (K(X, \mathbb{G}^{\wedge q}), K(X, \mathbb{G}^{\wedge (q+1)}), \dots)[q]$

$s_0(KGL) = H_{\mathbb{Z}} = (K_0^{EM}(X, pt), K_0^{EM}(X, \mathbb{G}^{\wedge 1}), \dots)$

$s_q(KGL) = (K_0^{EM}(-, \mathbb{G}^{\wedge q}), K_0^{EM}(-, \mathbb{G}^{\wedge (q+1)}), \dots)[q]$

Что такое $K(X, \mathbb{G}_m)$?

Посмотрим на $\widetilde{\mathcal{P}}(X, pt) \rightsquigarrow (\widetilde{\mathcal{P}}(X, pt), \mathrm{Aut})$

объекты: $(P \xrightarrow[\simeq]{\varphi} P)$, $P \in \widetilde{\mathcal{P}}(X, pt)$

морфизмы:
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\simeq"'] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ Q \arrow[r, "\simeq"'] & Q \end{tikzcd}$$

$\widetilde{\mathcal{P}}(X, \mathbb{G}_m) := (\widetilde{\mathcal{P}}(X, pt), \mathrm{Aut})$

$\mathcal{A}$ – адд. категория $\rightsquigarrow S^{-1}S\mathcal{A}$ – симпл. адд. категория

$(P \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} Q,\ P' \underset{\beta'}{\overset{\alpha'}{\rightleftarrows}} Q',\ \mathrm{Coker}\,\alpha \overset{\gamma}{\cong} \mathrm{Coker}\,\alpha') = S^{-1}S\mathcal{A}$

0-симплексы = пары объектов $\mathcal{A}$

1-симплексы = объекты $S^{-1}S\mathcal{A}$

2-симплексы = $(P \rightleftarrows Q \rightrightarrows L,\ P' \rightleftarrows Q' \rightrightarrows L)$

...

$KGL = (K(S^{-1}S\widetilde{\mathcal{P}}(-, pt)), \Omega K((S^{-1}S)^2\widetilde{\mathcal{P}}(-, pt)), \dots)$

$GW(-):\ Sm/k \longrightarrow Spaces$

$\mathbb{Z}^{GW}(0) = \ n \longmapsto (GW_0(\Delta^n \times -))_{Nis}$

$\mathbb{Z}^{GW}(1) = \ n \longmapsto (GW_0^{aut}(\Delta^n \times -))_{Nis}$

$\dots$

$GW(X,Y) = (\widetilde{\rho}(X,Y) + \text{формы})$ — должно быть так

$H^p(X, \mathbb{Z}^{GW}(q)) \Longrightarrow GW_{\dots}(X)$

$H^{GW} := (\mathbb{Z}^{GW}(0), \mathbb{Z}^{GW}(1), \dots)$

должен оказаться Ω-биспектром

$Hom((*, \mathbb{G}_m), H^{GW}) = W(k)$? $H^{GW} \twoheadrightarrow H_{\mathbb{Z}}$

$(\qquad H_{\mathbb{Z}}) = 0$