

Рассмотрим категорию C : $// k = \overline{k}$

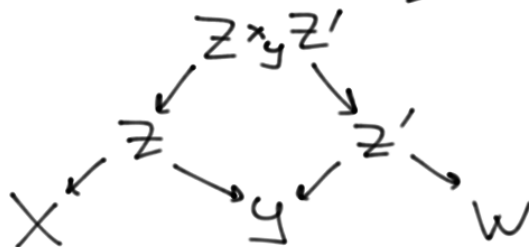
$$\text{Ob } C = \text{Ob } S_m/k \quad \begin{array}{c} f \\ \swarrow \\ X \end{array} \begin{array}{c} Z \\ \searrow \\ g \\ Y \end{array} \quad f - \text{л.с.и}$$

$$T(X, Y) = \{ X \begin{array}{c} f \\ \swarrow \\ \end{array} Z \begin{array}{c} g \\ \searrow \\ \end{array} Y \mid f \text{ плоский конечный} \}$$

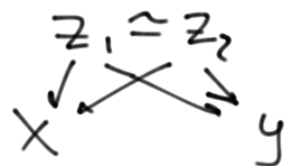
т.е. взяли F_Z и для $(U, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ $Z = U \times_{\varphi} \{0\}$ — схема

$$\left[X \begin{array}{c} Z_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} Y \right] + \left[X \begin{array}{c} Z_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} Y \right] = \left[X \begin{array}{c} Z_1 \sqcup Z_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \end{array} Y \right] - \text{сумма}$$

Композиция:



эквивалентно:



$\sim T(X, Y)$ — моноид

$\text{Hom}_C(X, Y) = G(T(X, Y))$ — группа Гротендика

Опр. $F: C^{\text{op}} \longrightarrow \text{Ab}$ — предпучок с $\mathcal{A}$ -трансферами

F — топологически инвариантен, если $F(X) \xrightarrow[p^*]{\sim} F(X \times A')$

Умеется вложение $S_m/k \longrightarrow C$

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array} \longmapsto X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \searrow \\ \end{array} Y$$

S — базовая схема (далее $S = \mathbb{A}_y^n$)

X — гладкое, отн. разм. 1

— относительная кривая над S

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow p \\ S \end{array}$$

Опр. $X \hookrightarrow \overline{X}$ — хорошая компактификация, если

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{\text{откр}} & \bar{X} & \xleftarrow{z.} & X_{\infty} \\
 & \searrow p & \downarrow \bar{p} & & \nearrow a \\
 & & S & &
 \end{array}$$

- $\bar{p}$ проект., гладкий
- q конечный эталонный
- (S -генз. $\Rightarrow X_{\infty} = \coprod S$)

Теорема (жесткости) Пусть $\mathbb{F}$ - гомотопически инв. предпучок с $\mathcal{L}$ -трансферами, $n\mathbb{F} = 0$, ($n \perp \text{char } k$)

Пусть X - отн. кривая с хорошей компактификацией $\bar{X}$
 $\downarrow$
 S $x_1, x_2: S \rightarrow X$ $x_1(0) = x_2(0)$
 (0 - з. точка S)

Тогда $x_1^* = x_2^*: \mathbb{F}(X) \rightarrow \mathbb{F}(S)$

Следствие $\text{Spec}(k) \xrightarrow{0} S \rightsquigarrow \mathbb{F}(S) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}(k)$

Лемма $\bigoplus_{s: S \rightarrow X} \mathbb{Z} \cdot s \otimes \mathbb{F}(X) \rightarrow \mathbb{F}(S)$ пропускается через
 $(s \otimes \alpha \mapsto s^*(\alpha))$
 $\rightarrow \text{Pic}(\bar{X}, X_{\infty}) \otimes \mathbb{F}(X)$

Пусть лемма доказана и $x_1(0) = x_2(0)$.

$[x_1(S)] = [x_2(S)]$ в $\text{Pic}(\bar{X}, X_{\infty})/n$

$\text{Pic}(\bar{X}, X_{\infty})/n \subseteq H_{\text{ét}}^2(\bar{X}, j_!(\mu_n)) \parallel j: \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$
 $\parallel$
 $H_{\text{ét}}^2(\bar{X}, j_{0*}(\mu_n)) \quad j_0: X \rightarrow \bar{X}$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \rightarrow & \mathcal{X} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & S
 \end{array}$$

$\text{Pic}(\bar{X}, X_{\infty})/n \hookrightarrow H_{\text{ét}}^2(\bar{X}, j_!(\mu_n))$

$\downarrow$ $\text{Pic}(X, X_{\infty})/n \hookrightarrow H_{\text{ét}}^2(\bar{X}, j_{0*}(\mu_n))$

$\downarrow$ - т.о. замена базы

$$Y \xrightarrow{z} X \rightsquigarrow \text{Pic}(X, Y) = \{ (L, \varphi) \mid L - \text{лин. расст. над } X, \varphi: L|_Y \cong \mathcal{O}_Y \}$$

т.о. замене базы:

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} & \xrightarrow{\bar{i}} & \overline{\mathcal{X}} \\ \uparrow j_0 & & \uparrow j \\ X & \xrightarrow{i} & \mathcal{X} \end{array} \quad \bar{i}^*(j_! \mu_n) = j_{0,!} (\underbrace{i^* \mu_n}_{\mu_n})$$

$$\rightsquigarrow [\mathcal{X}_1(S)] = [\mathcal{X}_2(S)] \text{ в } \text{Pic}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty)/n$$

Вообще, $\text{Pic}^0(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty)$ — группа точек некоторого предст. функтора:

$$\mathcal{J}(\overline{\mathcal{X}}/S, \mathcal{X}_\infty/S)(S), \text{ а } \mathcal{J}(\overline{\mathcal{X}}/S, \mathcal{X}_\infty/S) \cong \mathcal{J}(\overline{\mathcal{X}}/S)$$

примерно $R_{\mathcal{X}_\infty/S}^{(1)}(\Gamma_m, \mathcal{X}_\infty)$

$$\text{ядро } R_{\mathcal{X}_\infty/S}(\Gamma_m, \mathcal{X}_\infty) \xrightarrow{N} \Gamma_m, S$$

$$[\mathcal{X}_1(S)] - [\mathcal{X}_0(S)] \in \text{Pic}^0(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty)$$

$$1 \longrightarrow n\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J} \xrightarrow{\cdot n} \mathcal{J} \longrightarrow 1$$

— точна в этальной топологии

$$\mathcal{J}(S) \xrightarrow{\cdot n} \mathcal{J}(S) \longrightarrow H_{\text{et}}^1(S, n\mathcal{J})$$

↓
это сюръекция

поскольку S
строго гёльзенда

Как доказывать Лемму?

$$\text{div } f \rightarrow \bigoplus \mathbb{Z} \cdot s \longrightarrow \text{Pic}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty) \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccc} s: S \rightarrow X & s \mapsto [s(S)] & \\ \searrow & \downarrow & \\ \text{div } f, f: \overline{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{P}_S^1 : f - \text{эт над } 0 \times S \cup \infty \times S, f(\mathcal{X}_\infty) \subset 1 \times S & & \end{array}$$

pet. $\searrow$

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X} \setminus f^{-1}(1 \times S)$$

$$\operatorname{div} f = \coprod s_i(S) - \coprod t_j(S)$$

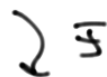
$$\coprod s_i(S) \rightarrow \mathcal{X}_1 \leftarrow \coprod t_j(S)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow f & \downarrow \\ 0 \times S & \hookrightarrow A'_S & \hookleftarrow \infty \times S \\ & \text{"} & \\ & \mathbb{P}'_S \setminus 1 \times S & \end{array}$$



$$\coprod s_i(S) \xrightarrow{\tau_0} \mathcal{X}_1 \xleftarrow{\tau_\infty} \coprod t_j(S)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow \varphi_0 & \uparrow \varphi & \uparrow \varphi_\infty \\ 0 \times S & \xrightarrow{i_0} A'_S & \xleftarrow{i_\infty} \infty \times S \end{array}$$



$$\oplus \mathbb{F}(s_i(S)) \leftarrow \mathbb{F}(\mathcal{X}_1) \rightarrow \oplus \mathbb{F}(t_j(S))$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}(\varphi_0) \downarrow & \downarrow \mathbb{F}(\varphi) & \downarrow \mathbb{F}(\varphi_\infty) \\ \swarrow \sum \mathbb{F}(s_i) & & \searrow \sum \mathbb{F}(t_j) \\ \mathbb{F}(S) \leftarrow & \mathbb{F}(A'_S \times S) & \rightarrow \mathbb{F}(S) \end{array}$$

f — кон., свр., плоское



$$\varphi = \left(\begin{array}{ccc} & \mathcal{X}_1 & \\ f \swarrow & & \searrow id \\ A'_S & & \mathcal{X}_1 \end{array} \right)$$

Хотим: если f
как выше, то
 $\sum \mathbb{F}(s_i)_{(\alpha)} = \sum \mathbb{F}(t_j)_{(\alpha)}$