Framed motives

Иван Панин

18.09.2014

Несколько дней назад появился препринт [GP]: Garkusha, Panin, *Framed motives of algebraic varieties (after V. Voevodsky)*, arXiv:1409.4372. Она написана на основании записок Воеводского 2001–2003 годов, которые он написал для себя лично. Существование этих записок заподозрил Гаркуша на основании одной фразы в статье Воеводского в сборнике Motivic homotopy theory, Universitext, Springer-Verlag, 2007. В 2010 году Воеводский послал эти записки авторам.

1 Формулировки задач

Для начала сформулируем две задачи о комплексах свободных абелевых групп. Все фигурирующие в них объекты будут определены ниже.

1. Докажите, что $H_n(\mathbb{Z}F(\Delta^\bullet_{\mathbb{C}}, \mathrm{Spec}(\mathbb{C})), \mathbb{Q}) = H_n(\mathbb{Q}F(\Delta^\bullet_{\mathbb{C}}, \mathrm{Spec}(\mathbb{C})))$ совпадает с $\mathbb{Q}$ при $n = 0$, и с 0 при $n \neq 0$.

2. Докажите, что $H_n(\mathbb{Z}F(\Delta^\bullet_{\mathbb{R}}, \mathrm{Spec}(\mathbb{R})), \mathbb{Q}) = H_n(\mathbb{Q}F(\Delta^\bullet_{\mathbb{R}}, \mathrm{Spec}(\mathbb{R})))$ совпадает с $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ при $n = 0$, и с 0 при $n \neq 0$.

Комментарий: из одного результата Левина

$$\pi_{n,0}(S^0_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q}, & n = 0, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

вместе с одним из основных результатов [GP]

$$\pi_{n,0}(S^0_k) \otimes \mathbb{Q} = H_n(\mathbb{Z}F(\Delta^\bullet_k, \mathrm{Spec}(k))) \otimes \mathbb{Q} \tag{1}$$

следует результат первой задачи. Равенство (1) доказано для совершенного поля k. Открытый вопрос (Serre's finiteness conjecture) состоит в том, что

$$\pi_{n,0}(S^0_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} = GW(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{Q}, & n = 0, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

Теорема Мореля: $\pi_{0,0}(S^0_k) = GW(k)$. Таким образом, осталось разобраться со случаем $n > 0$. Теорема Нешитова: $H_0(\mathbb{Z}F(\Delta^\bullet_k, \mathrm{Spec}(k))) = GW(k)$ (что фактически дает новое доказательство теоремы Мореля).

2 Комплексы $\mathbb{Z}F(\Delta^\bullet_k, \mathrm{Spec}(k))$

Пусть k — любое поле (содержательные утверждения про эти комплексы возможны, когда поле совершенно).

Пусть $U, X \in \mathrm{Sm}/k$, $n \geq 0$. Мы построим $\mathbb{Z}F_n(U, X)$ (аналог $\mathrm{Cor}(U, X)$): это свободная абелева группа, порожденная геометрическими данными $(n, Z, V \xrightarrow{(g,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)} X \times \mathbb{A}^n)$ вида

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[r, "(g,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)"] & X \times \mathbb{A}^n \\
U \times \mathbb{A}^n & Z \arrow[l] \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[d] & X \times 0 \arrow[u] \\
 & U &
\end{tikzcd}$$

профакторизованная по $\mathbb{Z} \cdot [\varnothing]$. Здесь π этально, $Z \hookrightarrow V$ — замкнутое вложение, и

1. $Z = \{\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n = 0\} \subseteq V$;
2. Z конечен над U
3. Z связно.

Замечание 2.1. Из первых двух условий следует, что если U неприводимо, то либо морфизм $Z \to U$ сюръективен, либо $Z = \varnothing$.

Замечание 2.2. Нас интересует только росток отображения (g, φ) в маленькой этальной окрестности Z. Будем говорить, что набор $(n, Z, V \xrightarrow{(g,\varphi)} X \times \mathbb{A}^n)$ эквивалентен набору $(n', Z', V' \xrightarrow{(g',\varphi')} X \times \mathbb{A}^{n'})$, если $n = n'$, $Z = Z'$, и существует V'' такая, что

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dr, "(g,\varphi)"] & \\
V'' \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \times \mathbb{A}^n \\
 & V' \arrow[ur, "(g',\varphi')"'] &
\end{tikzcd}$$

Определение 2.3. $\mathbb{Z}F(U, X) = \varinjlim_{n \geq 0} \mathbb{Z}F_n(U, X) = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{Z}F_n(U, X)$. При этом $\mathbb{Z}F_n(U, X) \xrightarrow{\sigma_X} \mathbb{Z}F_{n+1}(U, X)$ выглядит так:

$$(n, Z, V \xrightarrow{(g,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)} X \times \mathbb{A}^n) \mapsto (n+1, Z \times 0, V \xrightarrow{(g,\varphi_1,\ldots,\varphi_n,t_{n+1})} X \times \mathbb{A}^{n+1}),$$

где

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dr] & \\
V \times \mathbb{A}^1 \arrow[ur, "pr"] \arrow[rr] \arrow[dr] & & (X \times \mathbb{A}^n) \times \mathbb{A}^1 \\
 & \mathbb{A}^1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Отображение σ_X называется **надстройкой по** X.

Напомним, что $\Delta_k^r = \{\sum t_i = 1\} \subseteq \mathbb{A}_k^{r+1}$.

Замечание 2.4. $\mathbb{Z}F_n(U, X)$ функториально по U, а именно, для $f\colon V \to U$ имеется отображение $f^*\colon \mathbb{Z}F_n(U, X) \to \mathbb{Z}F_n(V, X)$, которой называется **заменой базы**:

$$\begin{tikzcd}
 & V' \arrow[dl] & & \mathcal{V} \arrow[r] & X \times \mathbb{A}^n \\
V \times \mathbb{A}^n \arrow[dr] & (V \times_U Z)_{red} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & U \times \mathbb{A}^n \arrow[dr] & Z \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & X \times 0 \arrow[u] \\
 & V \arrow[rr, "f"] & & U &
\end{tikzcd}$$

При этом f^* согласовано с надстройкой σ_X. Поэтому есть отображение $f^*\colon \mathbb{Z}F(U, X) \to \mathbb{Z}F(V, X)$.

Определение 2.5. Для любого $X \in \mathrm{Sm}/k$ есть комплекс $\mathbb{Z}F(\Delta_k^\bullet, X)$, дифференциалы которого выглядят так:

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\partial_i^*\colon \mathbb{Z}F(\Delta_k^r, X) \to \mathbb{Z}F(\Delta_k^{r-1}, X).$$

В частности, есть комплекс $\mathbb{Z}F(\Delta_k^\bullet, \mathrm{Spec}(k))$.

Замечание 2.6. Забегая сильно вперед, скажем, что у категории $SH(k)$ есть разные модели. Например, можно брать спектры в двух направлениях: S^1 и $\mathbb{G}_m$. Можно определить категорию SH^{fr}, основанную на пучках с fr-трансферами. Окажется, что $SH_{S^1,\mathbb{G}_m}(k) \cong SH^{\mathrm{fr}}_{S^1,\mathbb{G}_m}(k)$. Пусть $X \in \mathrm{Sm}/k$. Можно спрашивать, нет ли явной фибрантной замены для $\Sigma^\infty_{S^1,\mathbb{G}_m}(X_+)$. Ответ: она есть, и появится на одной из следующих лекций. Для этого мы описываем биспектр $M^{\mathrm{fr}}(X)$, $M^{\mathrm{fr}}(X)(1)$, $M^{\mathrm{fr}}(X)(2)$, $\ldots$, и оказывается, что если его вычислить на k'/k, то получится нечто, слабо эквивалентное $\Sigma^\infty_{S^1,\mathbb{G}_m}(X_+)$. В частности, появляется и $\Sigma^\infty_{S^1,\mathbb{G}_m}(S^0_k)(k)$. Оказывается, что $(M^{\mathrm{fr}}(X) \otimes \mathbb{Z})(k') = \mathbb{Z}F(\Delta^\bullet_{k'}, X)$. Теорема: $SH(k) \otimes \mathbb{Q} = SH_{S^1,\mathbb{G}_m}(k) \otimes \mathbb{Q} = DM_{\mathrm{fr}}(k) \otimes Q$. Категория $DM_{\mathrm{fr}}(k) \otimes \mathbb{Q}$ строится по образу и подобию категории $DM(k) \otimes \mathbb{Q}$.

2.0.1 Категория $\mathbb{Z}F_*$

Мы построим аналог категории Cor и категории $DM^-_{\mathrm{fr}}(k)$, $DM_{\mathrm{fr}}(k)$. Имеется полное вложение $DM^-_{\mathrm{fr}}(k) \to DM_{\mathrm{fr}}(k)$, если k совершенно.

Определим $\mathbb{Z}F_*(U, X) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}F_n(U, X)$.

Замечание 2.7. Можно определить множество $\mathrm{Fr}_n(U, X$ так же, как выше, только не требуется условие связности Z. Определим $\mathrm{Fr}_*(U, X) = \coprod_{n \geq 0} \mathrm{Fr}_n(U, X)$ и рассмотрим $(\mathbb{Z}\mathrm{Fr}_*(U, X))/((Z = Z_1 \coprod Z_2) - (Z_1) - (Z_2))$.

Лемма 2.8. Получится $\mathbb{Z}F_*(U, X)$.

Имеется естественное отображение композиции $\mathrm{Fr}_n(U, X) \times \mathrm{Fr}_k(X, Y) \to \mathrm{Fr}_{n+k}(U, Y)$. Можно рассмотреть категорию $\mathrm{Fr}_*(k)$: ее объекты — гладкие многообразия над k, а $Mor(U, X) = \mathrm{Fr}_*(U, X)$.

Как устроена композиция? Имеются наборы функций $W \xrightarrow{\psi_1,\ldots,\psi_k} \mathbb{A}^k$, $V \xrightarrow{\varphi_1,\ldots,\varphi_n} \mathbb{A}^n$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^k & & \\
 & & V \times_X W \arrow[urr] \arrow[dl] & & & W \arrow[r] \arrow[d] & Y \\
 & V \times \mathbb{A}^n \arrow[dl] & & Z'' \arrow[ul] & & X \times \mathbb{A}^k & \\
U \times \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^k & V \arrow[r, "g"] & {} & & X & & \\
 & & & U & & &
\end{tikzcd}$$

Итак, получаем данные $(n+k, Z'' = Z \times_X Z', V \times_X W \xrightarrow{(h \circ p_W, p_V^*(\varphi), p_W^*(\psi))} Y \times \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^k)$:

$$\begin{tikzcd}
 & V \times W \arrow[r, "{(h \circ p_W, (p_V^*(\varphi), P_W^*(\psi)))}"] & Y \times \mathbb{A}^n \\
U \times \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^k & Z \times_X Z' \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[dl] \arrow[dd] & X \times 0 \times 0 \\
Z \arrow[dr] & & \\
 & U &
\end{tikzcd}$$

Кроме этого, у нас имеется отображение

$$Mor(U, X) \to \mathrm{Fr}_0(U, X) \to \mathrm{Fr}_*(U, X),$$

которое отправляет $f \in Mor(U, X)$ в

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[r] \arrow[dl, "id"] & X \times \mathbb{A}^0 = X \\
U = \mathbb{A}^0 \times U & U \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & X \times 0 \\
 & U &
\end{tikzcd}$$

При этом морфизмы многобразий согласованы со вложениями $i_{U,X}$, а композиция frame-морфизмов ассоциативна.

Итог: есть категория $\mathrm{Fr}_*(k)$, объекты которой — гладкие многообразия, а морфизмы из U в X — $\mathrm{Fr}_*(U, X)$.

Замечание 2.9. Имеется функтор $\mathrm{Sm}/k \to \mathrm{Fr}_*(k)$ (он описан выше).

Замечание 2.10. $\mathrm{Fr}_0(U, X) = Mor(U_+, X_+)$. Категория Fr_0 для нульмерных многообразий — это то ли Γ, то ли Γ^{op} (категория Segal'a).

3 План на ближайшее будущее

Лемма 2.8 влечет, что $(U, X) \mapsto \mathbb{Z}F_*(U, X)$ можно композировать.

Определение 3.1. Определим категорию $\mathbb{Z}F_*(k)$: ее объекты — гладкие многообразия над k, а $Mor(U, X) = \mathbb{Z}F_*(U, X)$.

Определение 3.2. Рассмотрим категорию предпучков абелевых групп на $\mathbb{Z}F_*(k)$. Это абелева категория.

Есть категория пучков Нисневича абелевых групп с $\mathbb{Z}F_*(k)$-трансферами: это предпучки $\mathcal{F}$ на $\mathbb{Z}F_*(k)$ такие, что $\mathcal{F}|_{\mathrm{Sm}}$ — пучок Нисневича. Есть функторы

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fr}_*(k) \arrow[dr] & \\
\mathrm{Fr}_0(k) \arrow[u] & \mathbb{Z}\mathrm{Fr}_*(k) \arrow[d] \\
\mathrm{Sm}_k \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & \mathbb{Z}F_*(k)
\end{tikzcd}$$

Лемма 3.3. $SNfrT$ — абелева категория.

Поэтому есть производная категория $D^-(NSfrT)$ категории $NSfrT$ (комплексы ограничены сверху). Возьмем в ней полную подкатегорию $DM^-_{\mathrm{fr}}(k)$, состоящую из комплексов $A^\bullet$ со следующими свойствами:

1. пучковые гомологии $\underline{h}^i(A^\bullet)$ — это гомотопически инвариантные пучки;

2. $\underline{h}^i(A^\bullet)$ квази-стабильны (то есть, стабильны относительно надстройки σ).

Это и есть категория линейных оснащенных мотивов. Есть функтор в обратную сторону: $D^-(NSfrT) \to DM^-_{\mathrm{fr}}(k)$. Имеется функтор $\mathrm{Sm} \to DM^-_{\mathrm{fr}}(k)$, сопоставляющий многообразию X комплекс $M_{\mathrm{fr}}(X)$ такого вида: $U \mapsto \mathbb{Z}F(\Delta^\bullet \times U, X)$.

Замечание 3.4. Мотив Воеводского — это комплекс пучков $U \mapsto \mathrm{Cor}(\Delta^\bullet \times U, X)$.

Возвращаясь к первоначальной задаче, заметим, что $\mathbb{Z}F(\Delta^\bullet_{\mathbb{R}}, \mathrm{Spec}(\mathbb{R})) = M(pt)(pt)$, где $pt = \mathrm{Spec}(\mathbb{R})$.

Из $\mathbb{Z}F_*(k)$ есть очевидная стрелка в $\mathrm{Cor}(k)$, отправляющая данные $(n, Z, (g, \varphi))$ в некоторый элемент $\mathrm{Cor}(U, X)$; он связан с Z, а кратности определяются функциями.

$\mathbb{Z}_f r(n) = M_{\mathrm{fr}}(\mathbb{G}_m^{\wedge n})[-n]$: Нешитов: $H^n(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Z}_{\mathrm{fr}}(n)) = K_n^{MW}(k)$. Гипотеза: $H^{2n}(X, \mathbb{Z}_{\mathrm{fr}}(n)) = \widetilde{CH}^n(X)$.

Тот факт, что $SH(k) \otimes \mathbb{Q} \cong DM_{\mathrm{fr}}(k) \otimes \mathbb{Q}$, был замечен в самый последний момент!