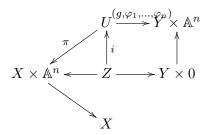
## Framed motives

## Иван Панин

## 25.09.2014

Ближайшая цель: построить категорию линейных оснащенных мотивов ('linear framed motives')  $D_{\rm fr}^-(k)$  (здесь k — совершенное поле; категория происходит из ограниченных сверху комплексов). Замечание. Есть еще категория  $D_{\rm fr}^{\rm eff}(k)$ , состоящая из всех комплексов.

Напоминание: мы определили  $\operatorname{Fr}_n(X,Y)$ , где  $X,Y\in\operatorname{Sm}/k$ . Это множество состоит из данных  $(n,Z,U\xrightarrow{(g,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}Y\times\mathbb{A}^n)$ , где

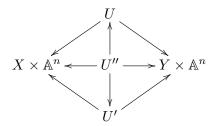


таких, что

- 1. Z замкнуто в  $X \times \mathbb{A}^n$  и конечно над X;
- 2. U это этальная окрестность Z в  $X \times \mathbb{A}^n$ , то есть,  $\pi$  этально, i замкнутое вложение;
- 3.  $Z = \{\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = 0\} \subseteq U$  как множество.

На этих [предварительных] данных есть отношение эквивалентности:  $(n, Z, U \xrightarrow{(g, \varphi_1, \dots, \varphi_n)} Y \times \mathbb{A}^n)$  эквивалентно  $(n', Z', U' \xrightarrow{(g', \varphi'_1, \dots, \varphi'_n)} Y \times \mathbb{A}^n)$  тогда и только тогда, когда

- 1. n = n';
- 2. Z = Z';
- 3. ростки указанных отображений совпадают: существуют U''  $\xrightarrow{(g'',\varphi_1'',...,\varphi_n'')} Y \times \mathbb{A}^n$  и отображения  $U'' \to U, \ U'' \to U'$  такие, что



При этом Z называется **носителем оснащенного соответствия**.

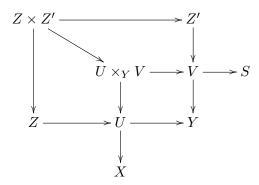
Замечание 0.1. Лемма Воеводского:  $\operatorname{Fr}_n(X,Y) = \operatorname{Map}_{\operatorname{Sh}_{\operatorname{Nis}}}(X_+ \times (\mathbb{P}^1,\infty)^{\wedge n}, Y_+ \wedge T^{\wedge n}).$ 

1

Имеется композиция

$$\operatorname{Fr}_k(X,Y) \times \operatorname{Fr}_n(Y,S) \to \operatorname{Fr}_{k+n}(X,S),$$

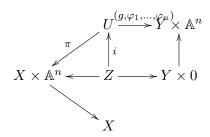
устроенная так:



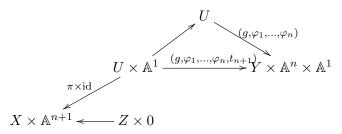
Эта композиция ассоциативна. Положим  $\mathrm{Fr}_*(X,Y) = \coprod_{n>0} \mathrm{Fr}_n(X,Y)$ .

Утверждение/определение: композиция  $\circ$  превращает ... в категорию  $\operatorname{Fr}_*(k)$ . Ее объекты — гладкие многообразия над k, морфизмы из X в Y — это  $\operatorname{Fr}_*(X,Y)$ .

Есть операция стабилизации  $\operatorname{Fr}_n(X,Y) \xrightarrow{\sigma_Y} \operatorname{Fr}_{n+1}(X,Y)$ . Она устроена так: данные



отправляются в



**Замечание 0.2.**  $\operatorname{Fr}_k(X,Y) = \operatorname{Map}(X_+ \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge k}, Y_+ \wedge T^{\wedge k}), \operatorname{Fr}_n(Y,S) = \operatorname{Map}(Y_+ \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge n}, S_+ \wedge T^{\wedge n}),$  и композиция описывается с помощью этих отождествлений.

Имеется функтор  $\operatorname{Fr}_*(k)$ , сопоставляющий данным  $(n, Z, (g, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \colon U \to Y \times \mathbb{A}^n)$  соответствие  $\sum m_i[Z_i'] \in \operatorname{Cor}(X,Y)$ . Найдем  $Z_i$  (для простоты считаем, что Z неприводимо). Обозначим

$$U \xrightarrow{g} Y$$

$$\downarrow X \times \mathbb{A}^n \longleftarrow Z$$

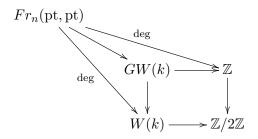
$$\downarrow p$$

$$X$$

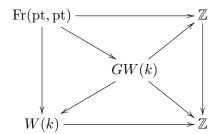
Тогда

$$Z \xrightarrow{(p,g)} X \times Y$$

Положим  $Z_1' = (p,g)(Z) \subseteq X \times Y$ . Припишем ему кратность  $n_1 := [k(Z):k(Z_1')] \cdot \dim_{k(Z)}(\mathcal{O}_{U,Z}/(\varphi_1,\ldots,\varphi_n))$ . Имеются морфизмы



и они согласованы со стабилизацией; поэтому



**Лемма 0.3.** Коуравнитель морфизмов  $i_0^*, i_1^* \colon \operatorname{Fr}(\mathbb{A}^1, \operatorname{pt}) \to \operatorname{Fr}(\operatorname{pt}, \operatorname{pt})$  является абелевой полугруппой

**Теорема 0.4** (Нешитов). Группа Гротендика этой полугруппы изоморфна GW(k)

Также должен быть функтор  $\operatorname{Fr}_*(k) \to \operatorname{Wor}$ .

Определение 0.5. 
$$\mathbb{Z}F_n(X,Y) = \mathbb{Z}[\operatorname{Fr}_n(X,Y)]/(Z_1 \coprod Z_2 - Z_1 - Z_2)$$
, где " $Z_1 \coprod Z_2 - Z_1 - Z_2$ "  $= (n, Z_1 \coprod Z_2, (g, \varphi_1, \dots, \varphi_n)) - (n, Z_1, (g, \varphi_1, \dots, \varphi_n)|_{U-Z_2}) - (n, Z_2, (g, \varphi_1, \dots, \varphi_n)|_{U-Z_2})$ .

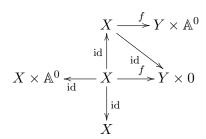
**Лемма 0.6.**  $\mathbb{Z}F_n(X,Y)$  — это свободная абелева группа, порожденная  $(n,Z,(g,\varphi_1,\ldots,\varphi_n))$  такими, что Z связно и непусто.

Выше определенная композиция  $\operatorname{Fr}_n \times \operatorname{Fr}_k \to \operatorname{Fr}_{n+k}$  уважает введенные соотношения, поэтому имеется композиция  $\mathbb{Z}F_n(X,Y) \times \mathbb{Z}F_k(Y,S) \to \mathbb{Z}F_{n+k}(X,S)$ .

**Определение 0.7.**  $\mathbb{Z}F_*(k)$  — категория, объекты которой — гладкие многообразия над k, а морфизмы из X в Y есть  $\bigoplus_{n>0} \mathbb{Z}F_n(X,Y)$ .

**Определение 0.8.** Предпучок абелевых групп с  $\mathbb{Z}F_*(k)$ -трансферами — это функтор  $\mathcal{F} \colon \mathbb{Z}F_*(k) \to \mathrm{Ab}$ .

**Замечание 0.9.** Имеются функторы  $\mathrm{Sm}/k \to \mathrm{Fr}_*(k) \to \mathbb{Z} F_*(k)$ ; их композиция i тождественна на объектах и морфизму  $f\colon X\to Y$  сопоставляет данные



Пучок абелевых групп с  $\mathbb{Z}F_*(k)$ -трансферами — это такой предпучок  $\mathcal{F}\colon \mathbb{Z}F_*(k)\to \mathrm{Ab}$ , что  $\mathcal{F}\circ i\colon \mathrm{Sm}\,/k\to \mathrm{Ab}$  является пучком.

**Лемма 0.10** (важная). Пусть  $\mathcal{F}$  — предпучок с  $\mathbb{Z}F_*(k)$ -трансферами. Тогда  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}$  снабжается единственным образом структурой предпучка с  $\mathbb{Z}F_*(k)$ -трансферами так, что канонический морфизм  $\mathcal{F} \to \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}$  — морфизм предпучков с трансферами.

**Следствие 0.11.** Категория  $SN_{\rm fr}T$  является абелевой.

Доказательство. Если  $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$  — морфизм пучков с трансферами, то  $\ker \varphi$  — автоматически пучок с трансферами. Для коядра рассмотрим  $\operatorname{Coker}(\varphi)$ ; по Лемме это пучок с трансферами.

Возьмем производную категорию  $DNS_{\rm fr}T$  (неограниченных комплексов). Рассмотрим в ней полную подкатегорию  $D_{\rm fr}^{\rm eff}(k)$ , состоящую из комплексов  $A^{ullet}$ , которые обладают свойствами

- 1.  $\underline{h}^i(A^{\bullet})$  гомотопически инвариантный пучок на Sm /k, то есть,  $\underline{h}^i(A^{\bullet})(X) = \underline{h}^i(A^{\bullet})(X \times \mathbb{A}^1)$  для любого  $X \in \text{Sm }/k$ ;
- 2. пучки  $\underline{h}^i(A^{\bullet})$  квази-стабильны.

Эта категория называется категорией линейных frame (=оснащенных) мотивов

**Лемма 0.12.** Если  $Y \in \text{Sm }/k$ , то  $\mathbb{Z}F_*(-,Y) \colon \mathbb{Z}F_*(k) \to \text{Ab}$  является пучком.

Определение 0.13.  $\mathbb{Z}F(X,Y) = \varinjlim_{\sigma_Y} \mathbb{Z}F_n(X,Y)$ .

**Замечание 0.14.** Пучок  $\mathbb{Z}F(-,Y)$  квази-стабилен.

**Лемма 0.15.** Элемент  $\tau_Y \in \operatorname{Fr}_1(Y,Y)$  задает отображение  $\operatorname{Fr}_n(X,Y) \to \operatorname{Fr}_{n+1}(X,Y), \alpha \mapsto \tau_Y \circ \alpha$ , которое совпадает с  $\sigma_Y$ 

**Определение 0.16.** Напомним, что  $\tau_U \in \operatorname{Fr}_1(U,U) \to \mathbb{Z}[\operatorname{Fr}_1(U,U)] \to (\mathbb{Z}F_1)(U,U)$ . Предпучок  $\mathcal{F} \colon \mathbb{Z}F_*(k) \to \operatorname{Ab}$  называется **квази-стабильным**, если для любого  $U \in \operatorname{Sm}/k$  отображение  $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ ,  $\gamma \mapsto \gamma \circ \tau_U$  является изоморфизмом.  $\mathcal{F}$  называется **стабильным**, если для любого U морфизм  $\tau_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$  является тождественным.

**Теорема 0.17** (?). Если k — совершенное поле, то  $SH(k)\otimes \mathbb{Q}\cong D^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{fr}}(k)\otimes Q$ . Стрелочка слева направо задается отображением Гуревича.

Известно, что  $H^n(k,\mathbb{Z}(n))=K_n^M(k)$ . Теорема Нешитова:  $H^n(k,\mathbb{Z}_F(n))=K_n^{MW}(k)$ . Известно, что  $H^{2n}(X,\mathbb{Z}(n))=\mathrm{CH}^n(X)$ . Следует ожидать, что  $H^{2n}(k,\mathbb{Z}_F(n))\cong\widetilde{\mathrm{CH}}^n(X)$ .