Framed motives

Иван Панин

25.09.2014

Ближайшая цель: построить категорию линейных оснащенных мотивов ('linear framed motives') $D^-_{\mathrm{fr}}(k)$ (здесь k — совершенное поле; категория происходит из ограниченных сверху комплексов). Замечание. Есть еще категория $D^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{fr}}(k)$, состоящая из всех комплексов.

Напоминание: мы определили $\mathrm{Fr}_n(X,Y)$, где $X, Y \in \mathrm{Sm}/k$. Это множество состоит из данных $(n, Z, U \xrightarrow{(g,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)} Y \times \mathbb{A}^n)$, где

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[r, "{(g,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}"] & Y \times \mathbb{A}^n \\
X \times \mathbb{A}^n \arrow[dr] & Z \arrow[l] \arrow[u, "i"] \arrow[r] & Y \times 0 \arrow[u] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

таких, что

1. Z замкнуто в $X \times \mathbb{A}^n$ и конечно над X;
2. U — это этальная окрестность Z в $X \times \mathbb{A}^n$, то есть, π этально, i — замкнутое вложение;
3. $Z = \{\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = 0\} \subseteq U$ как множество.

На этих [предварительных] данных есть отношение эквивалентности: $(n, Z, U \xrightarrow{(g,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)} Y \times \mathbb{A}^n)$ эквивалентно $(n', Z', U' \xrightarrow{(g',\varphi'_1,\ldots,\varphi'_n)} Y \times \mathbb{A}^n)$ тогда и только тогда, когда

1. $n = n'$;
2. $Z = Z'$;
3. ростки указанных отображений совпадают: существуют $U'' \xrightarrow{(g'',\varphi''_1,\ldots,\varphi''_n)} Y \times \mathbb{A}^n$ и отображения $U'' \to U$, $U'' \to U'$ такие, что

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \times \mathbb{A}^n & U'' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] & Y \times \mathbb{A}^n \\
 & U' \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

При этом Z называется **носителем оснащенного соответствия**.

Замечание 0.1. Лемма Воеводского: $\mathrm{Fr}_n(X,Y) = \mathrm{Map}_{\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}}(X_+ \times (\mathbb{P}^1, \infty)^{\wedge n}, Y_+ \wedge T^{\wedge n})$.

Имеется композиция

$$\mathrm{Fr}_k(X,Y)\times\mathrm{Fr}_n(Y,S)\to\mathrm{Fr}_{k+n}(X,S),$$

устроенная так:

$$\begin{tikzcd}
Z\times Z' \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & Z' \arrow[d] & \\
& U\times_Y V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & S \\
Z \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & Y & \\
& X & &
\end{tikzcd}$$

Эта композиция ассоциативна. Положим $\mathrm{Fr}_*(X,Y)=\coprod_{n\geq 0}\mathrm{Fr}_n(X,Y)$.

Утверждение/определение: композиция $\circ$ превращает $\dots$ в категорию $\mathrm{Fr}_*(k)$. Ее объекты — гладкие многообразия над k, морфизмы из X в Y — это $\mathrm{Fr}_*(X,Y)$.

Есть операция стабилизации $\mathrm{Fr}_n(X,Y)\xrightarrow{\sigma_Y}\mathrm{Fr}_{n+1}(X,Y)$. Она устроена так: данные

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[r, "{(g,\varphi_1,\dots,\varphi_n)}"] \arrow[dl, "\pi"'] & Y\times\mathbb{A}^n \\
X\times\mathbb{A}^n \arrow[dr] & Z \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, "i"'] & Y\times 0 \arrow[u] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

отправляются в

$$\begin{tikzcd}
& & U \arrow[dr, "{(g,\varphi_1,\dots,\varphi_n)}"] & \\
& U\times\mathbb{A}^1 \arrow[ur] \arrow[rr, "{(g,\varphi_1,\dots,\varphi_n,t_{n+1})}"] \arrow[dl, "\pi\times\mathrm{id}"'] & & Y\times\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^1 \\
X\times\mathbb{A}^{n+1} & Z\times 0 \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

Замечание 0.2. $\mathrm{Fr}_k(X,Y)=\mathrm{Map}(X_+\wedge(\mathbb{P}^1)^{\wedge k},Y_+\wedge T^{\wedge k})$, $\mathrm{Fr}_n(Y,S)=\mathrm{Map}(Y_+\wedge(\mathbb{P}^1)^{\wedge n},S_+\wedge T^{\wedge n})$, и композиция описывается с помощью этих отождествлений.

Имеется функтор $\mathrm{Fr}_*(k)$, сопоставляющий данным $(n,Z,(g,\varphi_1,\dots,\varphi_n)\colon U\to Y\times\mathbb{A}^n)$ соответствие $\sum m_i[Z_i']\in\mathrm{Cor}(X,Y)$. Найдем Z_i (для простоты считаем, что Z неприводимо). Обозначим

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[r, "g"] & Y \\
X\times\mathbb{A}^n & Z \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d, "p"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Тогда

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "{(p,g)}"] \arrow[dr] & X\times Y \arrow[d] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Положим $Z_1' = (p,g)(Z) \subseteq X\times Y$. Припишем ему кратность $n_1 := [k(Z):k(Z_1')]\cdot\dim_{k(Z)}(\mathcal{O}_{U,Z}/(\varphi_1,\ldots,\varphi_n))$.

Имеются морфизмы

$$\begin{tikzcd}
Fr_n(\mathrm{pt},\mathrm{pt}) \arrow[dr] \arrow[drr, "\mathrm{deg}"] \arrow[ddr, "\mathrm{deg}"'] & & \\
& GW(k) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\
& W(k) \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

и они согласованы со стабилизацией; поэтому

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fr}(\mathrm{pt},\mathrm{pt}) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathbb{Z} \arrow[dd] \\
& GW(k) \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
W(k) \arrow[rr] & & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Лемма 0.3. Коуравнитель морфизмов $i_0^*, i_1^* \colon \mathrm{Fr}(\mathbb{A}^1,\mathrm{pt}) \to \mathrm{Fr}(\mathrm{pt},\mathrm{pt})$ является абелевой полугруппой

Теорема 0.4 (Нешитов)**.** Группа Гротендика этой полугруппы изоморфна $GW(k)$

Также должен быть функтор $\mathrm{Fr}_*(k) \to \mathrm{Wor}$.

Определение 0.5. $\mathbb{Z}F_n(X,Y) = \mathbb{Z}[\mathrm{Fr}_n(X,Y)]/(Z_1 \coprod Z_2 - Z_1 - Z_2)$, где "$Z_1 \coprod Z_2 - Z_1 - Z_2$" $= (n, Z_1 \coprod Z_2, (g,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)) - (n, Z_1, (g,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)|_{U-Z_2}) - (n, Z_2, (g,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)|_{U-Z_2})$.

Лемма 0.6. $\mathbb{Z}F_n(X,Y)$ — это свободная абелева группа, порожденная $(n, Z, (g,\varphi_1,\ldots,\varphi_n))$ такими, что Z связно и непусто.

Выше определенная композиция $\mathrm{Fr}_n \times \mathrm{Fr}_k \to \mathrm{Fr}_{n+k}$ уважает введенные соотношения, поэтому имеется композиция $\mathbb{Z}F_n(X,Y)\times\mathbb{Z}F_k(Y,S) \to \mathbb{Z}F_{n+k}(X,S)$.

Определение 0.7. $\mathbb{Z}F_*(k)$ — категория, объекты которой — гладкие многообразия над k, а морфизмы из X в Y есть $\bigoplus_{n\geq 0}\mathbb{Z}F_n(X,Y)$.

Определение 0.8. Предпучок абелевых групп с $\mathbb{Z}F_*(k)$-трансферами — это функтор $\mathcal{F}\colon \mathbb{Z}F_*(k) \to \mathrm{Ab}$.

Замечание 0.9. Имеются функторы $\mathrm{Sm}/k \to \mathrm{Fr}_*(k) \to \mathbb{Z}F_*(k)$; их композиция i тождественна на объектах и морфизму $f\colon X\to Y$ сопоставляет данные

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & Y\times\mathbb{A}^0 \\
X\times\mathbb{A}^0 & X \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Y\times 0 \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Пучок абелевых групп с $\mathbb{Z}F_*(k)$-трансферами — это такой предпучок $\mathcal{F}\colon \mathbb{Z}F_*(k)\to\mathrm{Ab}$, что $\mathcal{F}\circ i\colon\ \mathrm{Sm}/k \to \mathrm{Ab}$ является пучком.

Лемма 0.10 (важная)**.** Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок с $\mathbb{Z}F_*(k)$-трансферами. Тогда $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}$ снабжается единственным образом структурой предпучка с $\mathbb{Z}F_*(k)$-трансферами так, что канонический морфизм $\mathcal{F} \to \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}$ — морфизм предпучков с трансферами.

Следствие 0.11. Категория $SN_{\mathrm{fr}}T$ является абелевой.

Доказательство. Если $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — морфизм пучков с трансферами, то $\operatorname{Ker}\varphi$ — автоматически пучок с трансферами. Для коядра рассмотрим $\widetilde{\operatorname{Coker}(\varphi)}$; по Лемме это пучок с трансферами. □

Возьмем производную категорию $DNS_{\mathrm{fr}}T$ (неограниченных комплексов). Рассмотрим в ней полную подкатегорию $D^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{fr}}(k)$, состоящую из комплексов $A^\bullet$, которые обладают свойствами

1. $\underline{h}^i(A^\bullet)$ — гомотопически инвариантный пучок на Sm/k, то есть, $\underline{h}^i(A^\bullet)(X) = \underline{h}^i(A^\bullet)(X \times \mathbb{A}^1)$ для любого $X \in \mathrm{Sm}/k$;
2. пучки $\underline{h}^i(A^\bullet)$ квази-стабильны.

Эта категория называется **категорией линейных frame (=оснащенных) мотивов**

Лемма 0.12. Если $Y \in \mathrm{Sm}/k$, то $\mathbb{Z}F_*(-,Y)\colon \mathbb{Z}F_*(k) \to \mathrm{Ab}$ является пучком.

Определение 0.13. $\mathbb{Z}F(X,Y) = \varinjlim_{\sigma_Y} \mathbb{Z}F_n(X,Y)$.

Замечание 0.14. Пучок $\mathbb{Z}F(-,Y)$ квази-стабилен.

Лемма 0.15. Элемент $\tau_Y \in \mathrm{Fr}_1(Y,Y)$ задает отображение $\mathrm{Fr}_n(X,Y) \to \mathrm{Fr}_{n+1}(X,Y)$, $\alpha \mapsto \tau_Y \circ \alpha$, которое совпадает с σ_Y

Определение 0.16. Напомним, что $\tau_U \in \mathrm{Fr}_1(U,U) \to \mathbb{Z}[\mathrm{Fr}_1(U,U)] \to (\mathbb{Z}F_1)(U,U)$. Предпучок $\mathcal{F}\colon \mathbb{Z}F_*(k) \to \mathrm{Ab}$ называется **квази-стабильным**, если для любого $U \in \mathrm{Sm}/k$ отображение $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$, $\gamma \mapsto \gamma \circ \tau_U$ является изоморфизмом. $\mathcal{F}$ называется **стабильным**, если для любого U морфизм $\tau_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ является тождественным.

Теорема 0.17 (?)**.** Если k — совершенное поле, то $SH(k) \otimes \mathbb{Q} \cong D^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{fr}}(k) \otimes Q$. Стрелочка слева направо задается отображением Гуревича.

Известно, что $H^n(k,\mathbb{Z}(n)) = K^M_n(k)$. Теорема Нешитова: $H^n(k,\mathbb{Z}_F(n)) = K^{MW}_n(k)$.
Известно, что $H^{2n}(X,\mathbb{Z}(n)) = \mathrm{CH}^n(X)$. Следует ожидать, что $H^{2n}(k,\mathbb{Z}_F(n)) \cong \widetilde{\mathrm{CH}}^n(X)$.