Framed motives

Иван Панин

02.10.2014

Замечание из конца прошлой лекции.

Напоминание: мы рассматриваем функторы $\mathrm{Sm} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}F_*(k) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{Ab}$ такие, что $\mathcal{F} \circ i$ — пучок Нисневича. Они называются пучками Нисневича с $\mathbb{Z}F_*(k)$-трансферами. Обозначим категорию таких пучков через $\mathrm{NS}_{\mathbb{Z}F_*} T$. Можно рассматривать категорию предпучков с $\mathbb{Z}F_*(k)$-трансферами: она обозначается через $\mathrm{PreS}_{\mathbb{Z}F_*} T$.

Лемма: категория $\mathrm{NS}_{\mathbb{Z}F_*} T$ абелева.

Рассмотрим производную категорию $D(\mathrm{NS}_{\mathbb{Z}F_*} T)$ и подкатегорию $DM^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{Z}F_*}(k)$ в ней, состоящую из комплексов $A^\bullet$, удовлетворяющих следующим свойствам:

1. для каждого i пучок $h^i(A^\bullet)$ является гомотопически инвариантным, то есть, $h^i(A^\bullet)(X) = h^i(A^\bullet)(X \times \mathbb{A}^1)$;
2. для каждого i пучок $h^i(A^\bullet)$ квази-стабилен (см. ниже).

Для каждого $U \in \mathrm{Sm}/k$ рассмотрим морфизм $\sigma_U \in (\mathbb{Z}F)_1(U, U)$, заданный следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
 & U \times \mathbb{A}^1 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] & U \times \mathbb{A}^1 \\
U \times \mathbb{A}^1 & U \times 0 \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[d] & U \times 0 \arrow[u, hook] \\
 & U &
\end{tikzcd}$$

Определено отображение $G(U) \to G(U)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ \sigma$, поэтому имеется (по лемме Йонеды) и отображение $\mathrm{Hom}_{\mathrm{PreS}_{\mathbb{Z}F_*} T}(\mathbb{Z}F_*(-, U), G) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}F_*(-, U), G)$.

Определение 0.1. Предпучок $G \in \mathrm{PreS}_{\mathbb{Z}F_*} T$ называется **квази-стабильным**, если для всякого U отображение $\sigma_U \colon G(U) \to G(U)$ является изоморфизмом; **стабильным**, если для всякого U это отображение совпадает с $\mathrm{id}_{G(U)}$.

Категория $DM^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{Z}F_*}(k)$ называется категорией эффективным линейных оснащенных (=frame) мотивов.

Имеется вариант этой категории, построенный по S^1-спектрам: $SH^{\mathrm{fr}}_{S^1}(k)$.

Теорема: $SH^{\mathrm{fr}}_{S^1}(k)_{\mathbb{Q}} \cong DM^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{Z}F_*}(k)_{\mathbb{Q}}$.

Можно построить категорию $DM_{\mathbb{Z}F_*}(k)$, «стабилизировав» категорию $DM^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{Z}F_*}(k)$ по $\mathbb{G}_m$. Аналогично строится $SH^{\mathrm{fr}}_{S^1, \mathbb{G}_m}(k)$ — мотивная гомотопическая категория категории биспектров.

Теорема: эквивалентность из предыдущей теоремы индуцирует эквивалентность между $SH^{\mathrm{fr}}_{S^1, \mathbb{G}_m}(k)_{\mathbb{Q}}$ и $DM_{\mathbb{Z}F_*}(k)_{\mathbb{Q}}$.

Еще одна теорема утверждает, что $SH^{\mathrm{fr}}_{S^1, \mathbb{G}_m}(k)$ эквивалентна стабильной гомотопической категории Воеводского $SH(k)$; поэтому и $SH^{\mathrm{fr}}_{S^1, \mathbb{G}_m}(k)_{\mathbb{Q}}$ эквивалентна $SH(k)_{\mathbb{Q}}$.

Итого, имеется естественная эквивалентность категорий $SH(k)_{\mathbb{Q}}$ и $DM_{\mathbb{Z}F_*}(k)_{\mathbb{Q}}$.

Кроме того, есть полное вложение $DM^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{Z}F_*}(k) \hookrightarrow DM_{\mathbb{Z}F_*}(k)$ (теорема сокращения, совместная работа с Ананьевским).

В топологии: стабильная гомотопическая категория $SH^{\top}_{\mathbb{Q}}$ эквивалентна производной категории категории $\mathbb{Q}$-векторных пространств, то есть, категории $\mathbb{Z}$-градуированных $\mathbb{Q}$-векторных пространств.

Рассмотрим $\mathbb{P}^1 \wedge \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\tau} \mathbb{P}^1 \wedge \mathbb{P}^1$. Наличие $\Sigma^\infty(\mathbb{P}^1) \wedge \Sigma^\infty(\mathbb{P}^1) \xrightarrow{\tau} \Sigma^\infty \wedge \Sigma^\infty$ равносильно наличию $\tau \in \mathrm{End}_{SH(k)}(S^0) = \mathrm{End}_{SH(k)}(\mathbb{P}^1 \wedge \mathbb{P}^1)$. Это инволюция, поэтому есть инволюция на всех Hom, то есть, инволюция на категории $SH(k)$. Поэтому каждый объект распадается на два куска: $\mathrm{id} = \frac{1+\tau}{2} + \frac{1-\tau}{2}$, значит, $SH(k)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{SH}(k)^+_{\mathbb{Q}} \oplus \mathrm{SH}(k)^-_{\mathbb{Q}}$.

Теорема (Morel; полное доказательство — Сизинский+Деглиз): категория $SH(k)^+_{\mathbb{Q}}$ эквивалентна категории $DM(k)_{\mathbb{Q}}$ мотивов Воеводского.

Функтор из $SH(k)^+$ в $DM(k)$ естественно рассматривать как алгебраическую версию функтора комплексной реализации.

Гипотеза: $SH(k)^-_{\mathbb{Q}}$ эквивалентна категории $DM_{\mathrm{Witt}}(k)_{\mathbb{Q}}$ Витт-мотивов с рациональными коэффициентами. Функтор $SH(k)^-_{\mathbb{Q}} \to DM_{\mathrm{Witt}}(k)_{\mathbb{Q}}$ должен быть аналогом вещественной реализации. Действительно, мы знаем, что $\mathrm{End}_{\mathrm{SH}(\mathbb{R})}(S^0_{\mathbb{R}}) = \pi^s_{0,0}(\mathbb{R}) = GW(\mathbb{R})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{(\dim,\mathrm{sign})} \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}$; последняя стрелка является изоморфизмом, и получаем разложение в положительную и отрицательную часть.

Более того, ожидается, что категория $DM_{\mathrm{Witt}}(k)_{\mathbb{Q}}$ эквивалентна категории $D(W\mathrm{-sheaves})$. Из этого следовала бы Serre's finiteness conjecture: $\pi^s_{n,0}(\mathbb{R})_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} W(\mathbb{R})_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$

1

По определению есть вложение $i\colon DM^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{Z}F_*}(k) \hookrightarrow D(\mathrm{NS}_{\mathbb{Z}F_*}T)$. Хочется иметь «хороший» функтор локализации L в обратную сторону.

Для любого $A^\bullet \in D(\mathrm{NS}_{\mathbb{Z}F_*}T)$ имеется морфизм $\sigma\colon A^\bullet \to A^\bullet$. Хочется, чтобы $L(\sigma)$ было изоморфизмом в $DM^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{Z}F_*}(k)$. Кроме того, нужно, чтобы морфизм $\mathrm{pr}^*\colon \mathcal{F} \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{A}^1, \mathcal{F})$ был изоморфизмом. При этом $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{A}^1, \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U \times \mathbb{A}^1)$; поэтому требование состоит в том, чтобы $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\mathrm{pr}^*} \mathcal{F}(U \times \mathbb{A}^1)$ был изоморфизмом.

Рассмотрим $\sigma_X\colon \mathbb{Z}F_*(X) \to \mathbb{Z}F_*(X)$. Напомним, что

$$\mathbb{Z}F_*(X)(U) = \mathbb{Z}F_*(U, X) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}F_*(k)}(\mathbb{Z}F_*(U), \mathbb{Z}F_*(X)).$$

Если $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}F_*(k)}(\mathbb{Z}F_*(U), \mathbb{Z}F_*(X))$, то $\sigma(\psi) = \sigma_X \circ \psi$.

Рассмотрим

$$\mathbb{Z}F_*(X) \xrightarrow{\sigma_X} \mathbb{Z}F_*(X) \to \mathrm{Cone}(\sigma_X)$$

и

$$\mathbb{Z}F_*(X) \xrightarrow{i_X = i_0} \mathbb{Z}F_*(X \times \mathbb{A}^1) \to \mathrm{Cone}(i_X).$$

Рассмотрим в $D(\mathrm{NS}_{\mathbb{Z}F_*}T)$ локализующую категорию $\mathcal{A}$, порожденную объектами вида $\mathrm{Cone}(\sigma_X)$ и $\mathrm{Cone}(i_X)$ (то есть, полную триангулированную подкатегорию, замкнутую относительно всех прямых сумм и содержащую эти объекты).

Теорема 1.1. Категория $DM^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{Z}F_*}(k)$ — это локализация категории $D(\mathrm{NS}_{\mathbb{Z}F_*}T)$ по подкатегории $\mathcal{A}$. Более точно, существует локализующий функтор $D(\mathrm{NS}_{\mathbb{Z}F_*}T) \xrightarrow{L} DM^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{Z}F_*}(k)$ такой, что

1. $\mathrm{Ker}(L) = \mathcal{A}$;

2. L — левый сопряженный функтор к i.

На данный момент L строится методом “small object argument”. Однако, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. Для любого $X \in \mathrm{Sm}/k$ имеется канонический изоморфизм $c\mathbb{Z}F(X) \to L(\mathbb{Z}F_*(X))$ в $DM^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{Z}F_*}(k)$.

Определение 1.3. $C\mathbb{Z}F(X) = C_*(\mathbb{Z}F(X))$; то есть, $(C\mathbb{Z}F(X))(U) = \mathbb{Z}F(\Delta^\bullet \times U, X)$.

Напомним, что $\mathbb{Z}F(X) = \varinjlim_{\sigma_X}(\mathbb{Z}F_*(X))$, где предел берется по правой надстройке $\varphi \mapsto \sigma_X \circ \varphi$. Сопоставление $X \mapsto C\mathbb{Z}F(X)$ задает ковариантный функтор из категории $\mathrm{Fr}_0(k)$ в категорию комплексов, так как для любого $f \in \mathrm{Fr}_0(X,Y)$ выполнено $f \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ f$. Но $g \circ \sigma_X$, вообще говоря, не совпадает с $\sigma_Y \circ g$ для $g \in \mathrm{Fr}_n(X,Y)$.

Обозначение: $M_{\mathbb{Z}F(k)}(X) = C\mathbb{Z}F(X)$.

Теорема 1.4. Для любого $X \in \mathrm{Sm}/k$, для любого p и для любого $A^\bullet \in DM^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{Z}F_*}(k)$ выполнено

$$H^p_{\mathrm{Nis}}(X, A^\bullet) = \mathrm{Hom}_{DM^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{Z}F_*}(k)}(M_{\mathbb{Z}F(k)}(X), A^\bullet[p]).$$

Последняя теорема есть следствие двух:

Теорема 1.5. $H^p_{\mathrm{Nis}}(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Ext}_{\mathrm{NS}_{\mathbb{Z}F_*} T}(\mathbb{Z}F_*(X), \mathcal{F})$ для любого $\mathcal{F} \in \mathrm{NS}_{\mathbb{Z}F_*} T$.

Теорема 1.6. Если $\mathcal{G}$ квази-стабилен, то $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{NS}_{\mathbb{Z}F_*} T)}(\mathbb{Z}F_*(X), \mathcal{G}) = \mathrm{Hom}$.

Теорема 1.7. $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{NS}_{\mathbb{Z}F_*} T)}(\mathbb{Z}F(X), A^\bullet) = \mathrm{Hom}_{DM^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{Z}F_*}(k)}(M_{\mathbb{Z}F_*}(X), A^\bullet)$, где $A^\bullet \in DM^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{Z}F_*}(k)$.