Framed motives

Иван Панин

16.10.2014

1 Интересная надежда

«Теорема» (?!) Пусть $k = \mathbb{C}$, X — гладкое над $\mathbb{C}$. Напомним, что по определению

$$\pi_{i,0}(\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(X_+), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = [S^i_s \wedge \mathbb{S}/n\mathbb{S}, \Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(X_+)]_{SH(k)}$$

где

$$\mathbb{S} = \Sigma_{\mathbb{P}^1}(S_0) = (S_0, \mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1 \wedge \mathbb{P}^1, \dots),$$
$$\mathbb{S} \xrightarrow{n} \mathbb{S} \to \mathrm{Cone}(n) \to ?$$

и

$$\Sigma^{\mathbb{P}^1}(X_+) = (X_+, X_+ \wedge (\mathbb{P}^1, \infty), X_+ \wedge (\mathbb{P}^1, \infty) \wedge (\mathbb{P}^1, \infty), \dots).$$

Тогда $\pi_{i,0}(\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(X_+), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \pi_i(\Sigma^\infty_{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C})_+), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. В частности,

$$\pi_{i,0}(\mathbb{S}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \pi_i(\Sigma^\infty_{\mathrm{top}}(S^0), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Мы обычно обозначаем

$$\pi^s_{i,0}(X_+, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \pi_{i,0}(\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(X_+), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

и

$$\pi_i(X(\mathbb{C})_+, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \pi^s_i(\Sigma^\infty_{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C})_+), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Гомотопические группы включаются в длинную точную последовательность

$$\dots \to \pi^s_i(Y, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \pi^s_i(Y) \xrightarrow{n} \pi^s_i(Y) \xrightarrow{\partial} \pi^s_{i-1}(Y, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \dots.$$

Поэтому имеется короткая точная последовательность

$$0 \to \pi^s_{i+1}(Y)/n \to \pi^s_i(Y, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to {}_n\pi^s_i(Y) \to 0$$

Очевидное утверждение: $\pi_{i,0}(\mathbb{S}) \twoheadrightarrow \pi_i(\Sigma^\infty_{\mathrm{top}}(S^0))$ для всех i. Оно следует из того, что композиция $\mathrm{SH}_{\mathrm{top}} \to \mathrm{SH} \to \mathrm{SH}_{\mathrm{top}}$ тождественна.

Если $i = 0$, правая часть равна $\mathbb{Z}$. Что в левой части переходит в 1? Ответ: $[\mathbb{S} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{S}]$.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_{i+1,0}(\mathbb{S}) \arrow[d] & & & \\
 & \pi_{i+1,0}(\mathbb{S})/n \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \pi_{i+1}(\mathbb{S}_{\mathrm{top}})/n \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_i(\mathbb{S}_{\mathrm{top}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] & {}_n\pi_i(\mathbb{S}_{\mathrm{top}}) \arrow[r] & 0 \\
 & \pi_{i+1}(\mathbb{S}_{\mathrm{top}}) & & &
\end{tikzcd}$$

Теорема 1.1 (Levine, 2010)**.** $\pi^s_{i,0}(S^0) \cong \pi^s_i(S^0_{\mathrm{top}})$.

Marc Levine доказал более сильное утверждение. Рассмотрим функтор $\mathrm{SH}_{\mathrm{top}} \to \mathrm{SH}(\mathbb{C})$, $X_\bullet \mapsto (X_\bullet)_{\mathrm{const}}$, где $X_\bullet$ — симплициальное множество, а $(X_\bullet)_{\mathrm{const}}$ — $X_\bullet$, рассматриваемое как постоянный симплициальный пучок. Этот функтор является полным вложением.

С другой стороны, имеется функтор геометрической реализации $\mathrm{SH}(\mathbb{C}) \to \mathrm{SH}_{\mathrm{top}}$, и композиция $\mathrm{SH}_{\mathrm{top}} \to \mathrm{SH}(\mathbb{C}) \to \mathrm{SH}_{\mathrm{top}}$ тождественна.

Наша «Теорема» похожа на следующую теорему Воеводского–Суслина (1994).

$H_{i,0}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong H_i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. При этом по определению

$$H_{i,0}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[i], M(X)) = H_i(\mathrm{Cor}(\Delta^\bullet_{\mathbb{C}}, X), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

(последнее равенство — непростая теорема).

2 Набросок доказательства теоремы Воеводского–Суслина

Пусть SetwT — категория этальных пучков абелевых групп с трансферами.

Определение 2.1. Контравариантный функтор $\mathcal{F}\colon \mathrm{Cor} \to \mathrm{Ab}$ называется **этальным пучком с трансферами**, если $\mathcal{F}|_{\mathrm{Sm}} = \mathcal{F} \circ i\colon \mathrm{Sm} \to \mathrm{Ab}$ — пучок в этальной топологии (здесь $i\colon \mathrm{Sm} \to \mathrm{Cor}$ — функтор графика).

Лемма 2.2. Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок с трансферами. Тогда существует единственная структура предпучка с трансферами на ассоциированном этальном пучке такая, что $\widetilde{\mathcal{F}_{\mathrm{et}}}\colon \mathcal{F} \xrightarrow{\mathrm{can}} \widetilde{\mathcal{F}_{\mathrm{et}}}$.

Следствие 2.3. Категория SetwT абелева.

Лемма 2.4. Обозначим через $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ следующий предпучок: $U \mapsto \mathrm{Cor}(U, X)$. Это этальный пучок с трансферами.

Напомним, что $C_i(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X))(U) = \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)(\Delta^i \times U)$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cor}(\Delta^\bullet, X) \arrow[d, equal] & M(X) \arrow[d, equal] & \\
C_*(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X))(\mathrm{pt}) \arrow[r, "\alpha"] & C_*(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)) & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \arrow[l, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

При этом $C_*(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X))(\mathrm{pt})$ рассматривается как комплекс постоянных пучков абелевых групп (такой пучок всегда является пучком с трансферами), а $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ — как комплекс, сконцентрированный в позиции 0.

Теорема 2.5 (жесткости)**.** Отображение $C_*(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X))(\mathrm{pt})/n \to C_*(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X))/n$ является квазиизоморфизмом комплексов в SetwT.

Мораль: пучки гомологий комплекса $C_*(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X))$ по модулю n постоянны. Иными словами, гомологии этого комплекса, вычисленные на локальных гензелевых схемах, такие же, как в замкнутой точке.

Теорема 2.6. $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Ab}}(C_*(X)(\mathrm{pt}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xleftarrow{\alpha^*} \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SetwT}}(C_*(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)), \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}})$ — изоморфизм.

Теорема 2.7. $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SetwT}}(C_*(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)), \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Ext}_{\mathrm{SetwT}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X), \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ — изоморфизм.

Объяснение: постоянный пучок $\underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ строго гомотопически инвариантен.

Имеется пара сопряженных функторов $\mathrm{Sh}_{\mathrm{et}} \to \mathrm{SetwT} \to \mathrm{Sh}_{\mathrm{et}}$.

Лемма 2.8. $\mathrm{Ext}_{\mathrm{SetwT}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X), \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \xrightarrow{\gamma} H^i_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ — изоморфизм.

Доказательство. Пусть $Y \to X$ — этальное покрытие. Применим к диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & Y \times_X Y \times_X Y \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & Y \times_X Y \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
\ldots \arrow[r] & X \arrow[r] & X \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

функтор $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}$:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times_X Y \times_X Y) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times_X Y)] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y) \arrow[d, "\pi"] \\
\ldots \arrow[r] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \arrow[r] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \arrow[r] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)
\end{tikzcd}$$

Тогда π — квази-изоморфизм. Возьмем $\mathrm{Hom}(-, I)$:

$$\begin{tikzcd}
& \ldots & \mathrm{Hom}_{\mathrm{SwT}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y), I) \arrow[l] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{SwT}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X), I) \arrow[l] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[l] \\
I(Y \times_X Y) & & I(Y) \arrow[ll] & I(X) \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Подробности см. Суслин–Воеводский. $\square$

Лемма 2.9. Гомоморфизм $H^i_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^i_{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ сравнения с обычными когомологиями — изоморфизм.

По определению $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Ab}}(C_*(X)(\mathrm{pt}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = H^i(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(C_*(X)(\mathrm{pt}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Пусть $n = p$ — простое. Получаем, что $H_i(C_*(X)(\mathrm{pt})/pC_*(X)(\mathrm{pt})) = H_i^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Теорема 2.10 (жесткости)**.** Пусть $\mathcal{F}\colon \mathrm{Cor} \to \mathrm{Ab}$ — предпучок с трансферами, $r \in \mathbb{Z}$, $r \neq 0$. Предположим, что для любого $Y \in \mathrm{Sm}$ выполнено $r \cdot \mathcal{F}(Y) = 0$. Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный. Тогда для любого $U \in \mathrm{Sm}/\mathbb{C}$ и для любой точки $u \in U$

$$\mathcal{F}(\mathcal{O}^{sh}_{U,u}) \xrightarrow{i^*} \mathcal{F}(u)$$

является изоморфизмом.

Следствие 2.11. $\widetilde{F_{\mathrm{et}}} \leftarrow \underline{\mathcal{F}(\mathbb{C})}$,

В свою очередь, теорема жесткости является следствием наличия спаривания (в некотором контексте)

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}) \otimes \mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty) \to \mathcal{F}(S).$$

где S — гладкая строго гензелева схема (например, $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{sh}_{U,u})$), $\overline{\mathcal{X}}$ — гладкая проективная относительная кривая над S, $\mathcal{X}_\infty$ — конечный этальный морфизм, $\mathcal{X}_{\infty,s} \neq \varnothing$:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{X}} \arrow[d, "p"] & \mathcal{X}_\infty \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\
S &
\end{tikzcd}$$

Спаривание завести несложно: напомним, что $\mathrm{Div}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty)$ — свободная абелева группа, порожденная замкнутыми неприводимыми $Z \subseteq \mathcal{X}$ таким, что Z замкнуто в $\overline{\mathcal{X}}$. Определим спаривание

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}) \otimes \mathrm{Div}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty) \to \mathcal{F}(s).$$

Если $s\colon S \to \overline{\mathcal{X}}$ — сечение, то есть дивизор $t(S)$. Пусть $\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$, тогда отправим

$$\alpha \otimes [t(S)] \mapsto t^*(\alpha) \in \mathcal{F}(S).$$

Лемма 2.12. 1. Отображение $\bigoplus \mathbb{Z}[t(S)] \xrightarrow{\rho} \operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty)$ сюръективно.

2. Для любого $\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ выполнено $\alpha \otimes \operatorname{Ker}(\rho) \mapsto 0 \in \mathcal{F}(S)$.

Эта лемма доказана в дипломной работе Нешитова (в более общем контексте).

В доказательстве используется теорема Гротендика: если $A \subseteq B$ — вложение регулярных колец, B — конечный над A, то B — плоский модуль над A.

Теорема 2.13 (о двух сечениях)**.** Пусть, как и выше, есть S, $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_\infty$, и есть два сечения $t_1, t_2\colon S \to \mathcal{X}$: $t_1(s) = t_2(s)$. Тогда $t_1^* = t_2^*\colon \mathcal{F}(\mathcal{X}) \to \mathcal{F}(S)$.

Доказательство. У нас есть спаривание $\mathcal{F}(\mathcal{X}) \otimes \operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty) \to \mathcal{F}(S)$. По условию $n \cdot \mathcal{F}(\mathcal{X}) = 0$ и $n \cdot \mathcal{F}(S) = 0$. Это спаривание пропускается через $\mathcal{F}(\mathcal{X}) \otimes \operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty)/n$. Заметим, что имеется сюръективный гомоморфизм $\deg\colon \operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty) \to Z$, $D \mapsto [D : S]$. Его ядро $\operatorname{Pic}^0(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty)$ — делимая группа (над полем $\mathbb{C}$ это просто якобиан, а над строго гензелевым кольцом свойство делимости не меняется). Поэтому $\operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty)/n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. □

Функтор $U \mapsto \operatorname{Pic}^0(\overline{\mathcal{X}} \times_S U, \mathcal{X}_\infty \times_S U)/\operatorname{Pic}(U)$ представим групповой S-схемой $\underline{\operatorname{Pic}^0}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty)$. Поэтому есть последовательность

$$0 \to {}_n\underline{\operatorname{Pic}^0}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty) \to \underline{\operatorname{Pic}^0}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty) \xrightarrow{n} \underline{\operatorname{Pic}^0}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty) \to 0,$$

точная как последовательность пучков в этальной топологии. Вычисляя значения на S, справа получим

$$\operatorname{Pic}^0(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty) \twoheadrightarrow \operatorname{Pic}^0(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty) \ni [t_1(S)] - [t_0(s)].$$

Поэтому $[t_1(S)] - [t_0(S)] = n[D]$, откуда $([t_1(S)] - [t_0(S)])^*(\alpha) = n[D]^*(\alpha) = 0$, так как $n\mathcal{F}(S) = 0$.

3 $\mathbb{Z}F_*$-контекст

Цель: $\pi^{(}_{i,0}X_+, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \pi_i^s(X(\mathbb{C})_+, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Рассмотрим категорию $\mathrm{Set}_{\mathbb{Z}\mathrm{F}}\mathrm{T}$ пучков абелевых групп с $\mathbb{Z}F_*$-трансферами. Эта категория абелева. Пучок $\mathbb{Z}F(X)$ лежит в $\mathrm{Set}_{\mathbb{Z}\mathrm{F}}\mathrm{T}$ (это стабилизация пучка $\mathbb{Z}F_*(X)$ по надстройке σ_X). У нас есть $M_{\mathbb{Z}F}(X) = C_*(\mathbb{Z}F(X))$. Рассмотрим комплекс $(C_*(\mathbb{Z}F(X)))(\mathrm{pt})$ абелевых групп как комплекс постоянных пучков с $\mathbb{Z}F_*$-трансферами. Есть стрелки

$$(C_*(\mathbb{Z}F(X))(\mathrm{pt}) \xrightarrow{\alpha} C_*(\mathbb{Z}F(X)) \xleftarrow{\beta} \mathbb{Z}F(X),$$

и поэтому

$$\operatorname{Ext}^i((C_*(\mathbb{Z}F(X)))(\mathrm{pt}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xleftarrow{\alpha^*} \operatorname{Ext}^i_{\mathrm{Set}_{\mathbb{Z}\mathrm{F}}\mathrm{T}}(C_*(\mathbb{Z}F(X)), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^*} \operatorname{Ext}^i_{\mathrm{Set}_{\mathbb{Z}\mathrm{F}}\mathrm{T}}(\mathbb{Z}F(X), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

При этом $\operatorname{Ext}^i_{\mathrm{Set}_{\mathbb{Z}\mathrm{F}}\mathrm{T}}(\mathbb{Z}F(X), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\gamma} H^i_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Z}/nZ) = H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ — изоморфизм (аналог леммы 2.8). Стандартные рассуждения показывают, что β^* — квази-изоморфизм (нужно использовать, что $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ строго гомотопически инвариантен).

Остается разобраться с α^*. Заметим, что

$$\operatorname{Ext}^i((C_*(\mathbb{Z}F(X)))(\mathrm{pt}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = H^i(\operatorname{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\mathbb{Z}F(\Delta^\bullet_{\mathbb{C}}, X), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})).$$

Из $\mathbb{Z}F(\Delta^\bullet_{\mathbb{C}}, X)$ есть отображение $\deg$ в $\operatorname{Cor}(\Delta^\bullet, X)$, но она не является изоморфизмом. Однако,

$$H^i(\operatorname{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\operatorname{Cor}(\Delta^\bullet_{\mathbb{C}}, X), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) = H^i(\operatorname{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\mathbb{Z}F(\Delta^\bullet_{\mathbb{C}}, X), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})).$$

Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с $\mathbb{Z}F_*$-трансферами и σ-квазистабильный. Начинаем строить спаривание $\mathcal{F}(\mathcal{X}) \otimes \operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty) \to \mathcal{F}(S)$: берем

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}) \otimes \left(\bigoplus_{\substack{t\colon S \to \mathcal{X} \\ t \text{ — сечение}}} \mathbb{Z} \cdot [t(S)] \right) \to \mathcal{F}(S),$$
$$\alpha \otimes t \mapsto t^*(\alpha).$$

Лемма 3.1. Естественное отображение

$$\rho\colon \bigoplus_{\substack{t\colon S \to \mathcal{X} \\ t \text{ — сечение}}} \mathbb{Z} \cdot [t(S)] \to \operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}_\infty)$$

сюръективно.

Лемма 3.2. Если $\alpha \in \mathcal{F}(\overline{\mathcal{X}})$, то $\alpha \otimes \operatorname{Ker}(\rho) \mapsto 0$

Пусть $\overline{\pi}\colon \overline{\mathcal{X}} \to \mathbb{P}^1_S$ — конечный сюръективный такой, что $(\overline{\pi})^{-1}(\{1\} \times S)$ содержит $\mathcal{X}_\infty$:

$$\begin{tikzcd}
D_0 \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{\mathcal{X}} \arrow[d, "\overline{\pi}"] & (\overline{\pi})^{-1}(\{1\} \times S) \arrow[l, hook'] \arrow[d] & \mathcal{X}_\infty \arrow[l, hook'] \\
\{0\} \times S \arrow[r] & \mathbb{P}^1_S & \{1\} \times S \arrow[l, hook'] &
\end{tikzcd}$$

и $\overline{\pi}$ этален над $\{0\} \times S$ и $\{\infty\} \times S$. Тогда $D_0 = \coprod t_i(S)$ и, аналогично, $D_\infty = \coprod t_j(S)$. Сопоставим такому $\overline{\pi}$ дивизор $D(\overline{\pi}) = \sum [t_i(S)] - \sum [t_j(S)]$. Очевидно, что он лежит в ядре отображения ρ.

Лемма 3.3 (Нешитов)**.** $\operatorname{Ker}(\rho)$ порождается такими дивизорами.

Если, кроме того, $\omega_{\mathcal{X}/S} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, то лемма Нешитова по-прежнему верна и, кроме того, для любого frame-морфизма вида

где r — ретракция на $\mathcal{X}$, левый вертикальный морфизм $\mathbb{A}^1$-гомотопен морфизму $t\colon S \to \mathcal{X}$.

То есть, нам нужна не просто гомотопия между дивизорами, а гомотопия вместе с некоторыми оснащениями.