K-теория алгебраических групп

Алексей Ананьевский

30.10.2014

1 Формулировка результата

Теорема 1.1. Пусть $\mathcal{G}$ — связная расщепимая группа Шевалле, и пусть $\pi_1(\mathcal{G}(\mathbb{C}))$ — группа без кручения (например, GL_n, SL_n, Sp_n, Spin_n; и вообще, любая односвязная полупростая группа). Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d] \\ S \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[1/m] \end{tikzcd}$$

Тогда

$$K_*(G) \cong K_*(S)[x_1, \ldots, x_n]/(x_i x_j = -x_j x_i, x_i^2 = \sum a_{ij} x_j),$$

где $a_{ij} \in {}_2K_1(S)$, а x_i соответствуют элементам $[\rho_i] \in K_1(G)$, где $\rho_i \colon G \to \mathrm{GL}_{n_i}$ — фундаментальные представления. Ответ нужно воспринимать как “twisted external algebra”.

Теорема 1.2. Пусть A — центральная простая алгебра, $c \in k^*$. Тогда

$$K_*(\mathrm{GL}_1(A)) = \bigoplus_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} K_*(A^{\otimes \sigma(I)})[|I|],$$

где $\sigma(\{i_1, \ldots, i_s\}) = \sum_j i_j$,

$$K_*(\mathrm{SL}_1(A;c)) = \bigoplus_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} K_*(A^{\otimes \sigma(I)})[|I|],$$

где $\mathrm{SL}_1(A;c)$ — элементы в $\mathrm{GL}_1(A)$ приведенной нормы c. Кроме того, имеется изоморфизм алгебр $K_*(\mathrm{SL}_1(A;c)) = K_*(\mathrm{GL}_1(A))/([Nrd]-[c])$; Напомним, что если $Nrd\colon \mathrm{GL}_1(A) \to k^*$ — приведенная норма, то $[Nrd] \in K_1(\mathrm{GL}_1(A))$.

Кроме того, в статье вычисляется K-теория торсоров относительно внутренних форм SL_n, Sp_{2n}, GL_n.

2 Доказательство

Мы будем сразу считать, что G — редуктивная группа. План действий:

1. Написать спектральную последовательность $E_1^{p,q} = K_{-q}(G/T) \otimes \Lambda^{n-p}(\mathbb{Z}^n) \Rightarrow K_{p-q}(G)$ и заметить, что она вырождается на втором листе.

2. Чтобы отождествить образующие, возьмем сначала $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ и сравним нашу спектральную последовательность с последовательностью для топологической K-теории. Топологическую K-теориюх таких групп посчитали Атья и Хирцебрух для классических групп, Hodgkin для исключительных, и потом Araki для всех.

3. Сравнивая спектралки для S, $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ и $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/m]$, получаем теорему.

4. Скручивая ответ (“Severi–Brauer descent”), получаем вторую теорему.

Замечание 2.1. Вообще, если X — регулярное многообразие с действием тора T, то есть спектральная последовательность

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Tor}_{n-p}^{K_0^T(\mathrm{pt})}(K_{-q}^T(X), K_0(\mathrm{pt})) \Rightarrow K_{p-q}(X).$$

Заметим, что $K_*^T(G) = K_*(G/T)$. Эта последовательность сосредоточена в области $0 \le p \le n$, $q \le 0$.

Замечание 2.2. На самом деле $\mathrm{Tor}_{n-p}^{K_0^T(\mathrm{pt})}(K_{-q}^T(X), K_0(\mathrm{pt})) = \mathrm{Tor}_{n-p}^{K_0^G(\mathrm{pt})}(K_{-q}^G(X), K_0(\mathrm{pt}))$. Кроме того, $K_*^T(X) = K_*^G(X \times G/T)$.

Замечание 2.3. Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{tikzcd}
X \times EG \arrow[r] \arrow[d] & EG \arrow[d] \\
(X \times EG)/G \arrow[r] & BG
\end{tikzcd}$$

В этой ситуации мы можем посчитать когомологии левого верхнего угла через когомологии остальных. Наша спектральная последовательность и есть аналог спектральной последовательности Кюннета. Для K-теории ее написал Hodgkin.

Замечание 2.4. Есть аналогичная спектралка для Rost cycle module $(M_0, M_1, \dots, M_l, \dots)$:

$$\bigoplus_{|I|=p} H_{-q-n}(G/T; M_l) \Rightarrow H_{-p-q}(G, M_l)$$

(см. Zainoulline, Gille).

Пример 2.5. Пусть $G = \mathrm{SL}_2$, $T = \mathbb{G}_m$. Рассмотрим линейное расслоение L:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SL}_2 \arrow[r, hook] \arrow[d] & L \arrow[dl] \\
\mathrm{SL}_2/\mathbb{G}_m &
\end{tikzcd}$$

Нулевое сечение: $\mathrm{SL}_2/\mathbb{G}_m \to L$. Напишем для него точную последовательность Гизина:

$$\dots \to K_*(\mathrm{SL}_2/\mathbb{G}_m) \to K_*(L) \to K_*(\mathrm{SL}_2) \to \dots$$

Здесь $K_*(L) = K_*(\mathrm{SL}_2/\mathbb{G}_m)$, и первая стрелка — умножение на класс Черна $c_1(L)$; в K-теории можно выбрать $c_1(L) = 1 - [L^\vee]$. Оказывается, это и есть наша спектральная последовательность.

Наша [гипотетическая] спектральная последовательность выглядит так:

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathrm{SL}_2/\mathbb{G}_m) \arrow[r] & K_0(\mathrm{SL}_2/\mathbb{G}_m) \\
K_1(\mathrm{SL}_2/\mathbb{G}_m) \arrow[r] & K_1(\mathrm{SL}_2/\mathbb{G}_m) \\
K_2(\mathrm{SL}_2/\mathbb{G}_m) \arrow[r] & K_2(\mathrm{SL}_2/\mathbb{G}_m) \\
\dots & \dots
\end{tikzcd}$$

Граничные отображения действуют так: $K_1(\mathrm{SL}_2/\mathbb{G}_m) \to K_1(G)$ и $K_1(G) \to G_0(\mathrm{SL}_2/\mathbb{G}_m)$.

Пример 2.6. Пусть $G = \mathrm{SL}_3$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SL}_3 \arrow[r, hook] \arrow[d] & L_1 \oplus L_2 \arrow[dl] \\ \mathrm{SL}_3 /T & \end{tikzcd}$$

Нулевое сечение: $(L_1 \oplus 0) \cup (0 \oplus L_2) \to L_1 \oplus L_2$. Поэтому есть точная последовательность для K-теории с носителем:

$$\dots \to (K_*)_{L_1 \cup L_2}(L_1 \oplus L_2) \to K_*(\mathrm{SL}_3 /T) \to K_*(\mathrm{SL}_3) \to \dots$$

Для первого члена нарисуем точную последовательность Майера–Вьеториса:

$$\dots \to (K_*)_0(L_1 \oplus L_2) \to (K_*)_{L_1}(L_1 \oplus L_2) \oplus (K_*)_{L_2}(L_1 \oplus L_2) \to (K_*)_{L_1 \cup L_2}(L_1 \oplus L_2) \to \dots$$

Средний член изоморфен $K_*(\mathrm{SL}_3 /T) \oplus K_*(\mathrm{SL}_3 /T)$, а первый — $K_*(\mathrm{SL}_3 /T)$.

Где в этих примерах комплекс Кошуля? А вот же он: если $R = \mathbb{Z}[x, y, x^{-1}, y^{-1}]$, то

$$R(T) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 - y^{-1} \\ -(1 - x^{-1}) \end{pmatrix}} R(T) \oplus R(T) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 - x^{-1} & 1 - y^{-1} \end{pmatrix}} R(T) \xrightarrow{x, y \mapsto 1} \mathbb{Z}$$

Вообще, есть четыре длинных точных последовательности:

$$\begin{gathered} K_*(L_1) \to K_*(L_1 \oplus L_2) \to K_*(G) \\ K_*(L_2) \to K_*(L_1 \oplus L_2) \to K_*(G) \\ K_*(\mathrm{SL}_3 /T) \to K_*(L_1) \to K_*(L_1 \oplus L_2 - L_2) \\ K_*(\mathrm{SL}_3 /T) \to K_*(L_2) \to K_*(L_1 \oplus L_2) - L_1) \end{gathered}$$

Напомним также, что $K_*(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) = K_*(\mathrm{pt}) \oplus K_{*-1}(\mathrm{pt})[x] \oplus K_*(\mathrm{pt})[y] \oplus K_{*-2}(\mathrm{pt})[x] \cup [y]$.

3 Построение спектральной последовательности

Пусть $\langle n \rangle$ — категория подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$; морфизмы — вложения подмножеств. Функтор $X \colon \langle n \rangle \to \mathrm{Spt}$ называется **кубом спектров**. Обозначим $X_I = X_*(I)$. Например, если $n = 2$, получаем стрелки

$$\begin{tikzcd} X_{\{1\}} \arrow[r] \arrow[d] & X_{\{1,2\}} \arrow[d] \\ X_{\varnothing} \arrow[r] & X_{\{2\}} \end{tikzcd}$$

Для $n = 1$ положим $\mathrm{fib}(X_*) = \mathrm{hofib}(X_\varnothing \to X_{\{1\}})$; для $n > 1$ рассмотрим $X_{*/n} \colon \langle n-1 \rangle \to \mathrm{Spt}$, $X_{*/n}(I) = X_I$; $X_{*\supset n} \colon \langle n-1 \rangle \to \mathrm{Spt}$, $X_{*\supset n}(I) = X_{I \cup \{n\}}$. тогда положим $\mathrm{fib}(X_*) = \mathrm{hofib}(\mathrm{fib}\, X_{*/n} \to \mathrm{fib}\, X_{*\supset n})$.

Пусть $X_{*\geq p}$ — следующий куб:

$$X_{*\geq p}(I) = \begin{cases} X_I, & |I| \geq p; \\ \mathbb{S}, *|I| < p. \end{cases}$$

Получаем башню $X_{*\geq n} \to X_{*\geq n-1} \to \dots \to X_{*\geq 0} = X_*$, из которой возникает фильтрация $\mathrm{fib}\, X_{*\geq n} \to \mathrm{fib}\, X_{*\geq n-1} \to \dots \to \mathrm{fib}\, X_{*\geq 0}$. Поэтому возникает спектральная последовательность

$$E_1^{p,q} = \pi_{-p-q}(\mathrm{hofib}(\mathrm{fib}\, X_{*\geq p+1} \to \mathrm{fib}\, X_{*\geq p})[1]) \Rightarrow \pi_{-p-q}(\mathrm{fib}\, X_*).$$

При этом $\operatorname{hofib}(\operatorname{fib} X_{*\geq p+1} \to \operatorname{fib} X_{*\geq p})[1] = \prod_{|I|=p} X_I[-p]$. Первый лист: дифференциал $d_1\colon \bigoplus_{|I|=p} \pi_{-q}(X_I) \to \bigoplus_{|J|=p+1} \pi_{-q}(X_J)$ индуцирован морфизмом $X_I \to X_{I\cup\{j\}}$. Если спектры связные, то есть стрелки $\pi_{-p}(\operatorname{fib} X_*) \to E_2^{p,0}$. $\Pi_0(X_I)$ — спектр Эйленберга–Маклейна, то есть, $\pi_i(\Pi_0(X_I)) = \begin{cases} \pi_0(X_I), & i=0; \\ 0, & i \neq 0. \end{cases}$. Тогда для связных спектров есть стрелки $X_I \to \Pi_0(X_I)$, и потому $X_* \to \Pi_0(X_*)$ индуцирует стрелки на спектральных последовательностях ${}^X E_2^{p,q} \to {}^{\Pi_0 X} E_2^{p,q}$.

На первом листе второй последовательности есть только одна горизонтальная строчка, а на втором листе все вырождается.

Поэтому

$$\pi_{-p}(\operatorname{fib}(\Pi_0 X_*)) = {}^{\Pi_0 X} E_2^{p,0} = E_2^{p,0}(X_*),$$

и есть стрелка $\pi_{-p}(\operatorname{fib} X_*) \to \pi_{-p}(\operatorname{fib}(\Pi_0 X_*))$.

Лемма 3.1.

1. Пусть есть умножение $X_I \wedge X_J \to X_{I\cup J}$. Тогда имеется умножение на $\pi_*(\operatorname{fib} X_*)$ и на $\pi_*(\operatorname{fib} \Pi_0 X_*) = E_2^{p,0}$; и граничное отображение $\pi_*(\operatorname{fib} X_*) \to E_2^{*,0}$ мультипликативно.
2. Пусть есть базовый спектр B, то есть, есть согласованный набор стрелок $B \to X_I$. Тогда $\pi_*(B)$ действуют на спектральной последовательности $E(X_*)$

Подставим в эту лемму K-теорию.

Пусть $X \supset Z_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Обозначим $Z_I = \bigcap_{i\notin I} Z_i$; тогда для $I \subset J$ выполнено $Z_I \subseteq Z_J$. Возьмем $X_I = K'(Z_I)$; тогда есть стрелки $K'(Z_I) \to K'(Z_J)$. При этом $K'(X - \bigcup Z_i) \cong \operatorname{fib}(K'(Z_*))[n]$, поскольку есть тройка $K'(Z_i) \to K'(X) \to K'(X - Z)$. Из общей теории, значит, получается спектральная последовательность ${}'E_1^{p,q} = \bigoplus_{|I|=p} K'_{-q}(Z_I) \Rightarrow K'_{n-p-q}(X - \bigcup Z_i)$.

Аналогично, $E_1^{p,q} = \bigoplus_{|I|=p} (K_{-q})_{Z_i}(X) \Rightarrow K_{n-p-q}(X - \bigcup Z_i)$.

Предложение 3.2. Пусть X — схема над S, $Z_i \subseteq X$, и все они регулярны. Тогда E — модуль над $K_*(S)$, и граничный гомоморфизм $\bigoplus_p K_p(X - \bigcup Z_i) \to \bigoplus_p E_2^{n-p,0}$ мультипликативен.

Пусть $X/\mathbb{C}$. Получаем спектральную последовательность

$${}^{\mathrm{top}}E_1^{p,q} = \bigoplus_{|I|=p} (K_{-q}^{\mathrm{top}})_{Z_I(\mathbb{C})}(X(\mathbb{C})) \Rightarrow K_{n-p-q}^{\mathrm{top}}((X - \bigcup Z_i)(\mathbb{C})),$$

и есть морфизм $E_1^{p,q} \to {}^{\mathrm{top}}E_1^{p,q}$.

Пусть $S = \mathbb{C}$; рассмотрим треугольник

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook] \arrow[d] & \bigoplus_{i=1}^n L_i \arrow[dl] & \bigcup_i (\underbrace{L_1 \oplus \cdots \oplus \widehat{L_i} \oplus \cdots \oplus L_n}_{Z_i}) \arrow[l, hook'] \\ G/T & & \end{tikzcd}$$

Получаем, что $K_*(Z_I) = K_*(G/T)$. На первом листе $E_1^{p,q} = \bigoplus_{|I|=p} K_{-q}(G/T) \Rightarrow K_{n-p-q}(G)$. Заметим, что $\bigoplus_{|I|=p} K_q(G/T) = K_{-q}(G/T) \otimes \Lambda^{n-p}(\mathbb{Z}^n)$, и $K_*(Z_I)$ соответствует $K_*(G/T) \otimes e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-p}}$, где $i_j \notin I$. Как устроен дифференциал? Вот так:

$$d_1(a \otimes e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-p}}) = \sum (-1)^{n+j-1} a \cup (1 - [L_{i_j}^\vee) \otimes e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-p}}.$$

Мы утверждаем, что $E_1^{*,q}$ — комплекс Кошуля. Например, $E_1^{*,0}$ выглядит так:

$$K_0(G/T) \otimes \Lambda^n(\mathbb{Z}^n) \to K_0(G/T) \otimes \Lambda^{n-1}(\mathbb{Z}^n) \to \cdots \to K_0(G/T) \otimes \Lambda^0(\mathbb{Z}^n).$$

Что происходит в E_2? В i-ой строчке стоит

$$\mathrm{Tor}_n^{R(T)}(K_i(G/T),\mathbb{Z})\dots\mathrm{Tor}_1^{R(T)}(K_i(G/T),\mathbb{Z})\mathrm{Tor}_0^{R(T)}(K_i(G/T),\mathbb{Z})$$

Мы знаем $K_n(G/T)=K_0(G/T)\otimes K_n(\mathbb{C})$. При этом $K_0(G/T)=R(T)/(\rho_1-\dim\rho_1,\dots,\rho_n-\dim\rho_n)$. Как посчитать $\mathrm{Tor}_n^{R(T)}(R(T)/(\rho_1,\dots,\rho_n),\mathbb{Z})$? Нужно снова написать комплекс Кошуля. Получаем, что $\mathrm{Tor}_p^{R(T)}(K_0(G/T),\mathbb{Z})=\Lambda^p(\mathbb{Z}^n)$.

Складывая все вместе, получаем E_2:

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\mathbb{Z} & \mathbb{Z}^{\oplus n} & \dots & \mathbb{Z}^{\oplus n} \arrow[drr] & \mathbb{Z} & 0 \\
K_1(\mathbb{C}) & K_1(\mathbb{C})^{\oplus n} & \dots & K_1(\mathbb{C})^{\oplus n} & K_1(\mathbb{C}) & 0 \\
K_1(\mathbb{C}) & K_1(\mathbb{C})^{\oplus n} & \dots & K_1(\mathbb{C})^{\oplus n} & K_1(\mathbb{C}) & 0
\end{tikzcd}$$

На $E_2^{*,0}$ есть умножение по лемме 3.1; с другой стороны, там есть внешнее умножение. Оказывается, они совпадают. Из этого следует, что все дифференциалы из первой строки равны нулю, а из мультипликативности следует, что и все остальные равны нулю: спектральная последовательность выродилась. У нее есть граничные отображения:

$$\begin{tikzcd}
K_n(G) \arrow[d] & K_{n-1}(G) \arrow[d] & \dots & K_1(G) \arrow[d] & K_0(G) \arrow[d] & \\
\mathbb{Z} & \mathbb{Z}^{\oplus n} & \dots & \mathbb{Z}^{\oplus n} & \mathbb{Z} & 0 \\
K_1(\mathbb{C}) & K_1(\mathbb{C})^{\oplus n} & \dots & K_1(\mathbb{C})^{\oplus n} & K_1(\mathbb{C}) \arrow[uul] & 0 \\
K_1(\mathbb{C}) & K_1(\mathbb{C})^{\oplus n} & \dots & K_1(\mathbb{C})^{\oplus n} & K_1(\mathbb{C}) & 0
\end{tikzcd}$$

Получаем короткую точную последовательность $0\to K_1(\mathbb{C})\to K_1(G)\to\mathbb{Z}^{\oplus n}\to 0$. Поэтому $\widetilde{K_1}(G)=\mathbb{Z}^{\oplus n}$.

Лемма 3.3. Если $[\tau_1],\dots,[tau_n]$ — базис $\widetilde{K_1}(G)$, то $K_*(G)$ — "twisted external algebra" на $[tau_1],\dots,[tau_n]$.

Из антикоммутативности получаем, что $[\tau_i]^2$ лежит в 2-кручении; с другой стороны, это должно лежать в K_2. Получаем окончательную формулу.

Для топологической спектральной последовательности второй лист выглядит так:

$${}^{\mathrm{top}}E_2^{p,q}=\mathrm{Tor}_{n-p}^{R(T)}(K_0^{\mathrm{top}}(G/T),\mathbb{Z})\otimes K_{-q}^{\mathrm{top}}(\mathrm{pt}).$$

Кроме того, $E_2^{p,q}=\mathrm{Tor}_{n-p}^{R(T)}(K_0^{(}G/T),\mathbb{Z})\otimes K_{-q}(\mathrm{pt})$, и есть стрелка $\varphi\colon E_2^{p,q}\to {}^{\mathrm{top}}E_2^{p,q}$ Заметим, что $K_0(G/T)=K_0^{\mathrm{top}}(G/T)$, поскольку G/T состоит из клеток. Отображение φ индуцировано стрелкой $K_{-q}(\mathbb{C})\to K_{-q}^{\mathrm{top}}(\mathrm{pt})$, которая тождественна при $q=0$ и равна нулю при $q\neq 0$. Мы знаем, что ${}^{\mathrm{top}}E_2^{p,q}$ вырождается на втором листе (здесь нужно вспомнить про периодичность Ботта). Поэтому $K_*^{\mathrm{top}}(\mathbb{C})\otimes_{K_*(\mathbb{C})}K_*(G)\cong K_*^{\mathrm{top}}(G)$. Осталось воспользоваться результатом Атьи–Хирцебруха–Hodgkin–Araki:

$$K_*^{\mathrm{top}}(G)=K_*^{\mathrm{top}}(\mathbb{C})\otimes_{K_*(\mathbb{C})}K_*(G)=K_*^{\mathrm{top}}(\mathbb{C})\otimes_{K_*(\mathbb{C})}K_*(\mathbb{C})\otimes\Lambda^*(\widetilde{K_1}(G))=K_*^{\mathrm{top}}(\mathbb{C})\otimes\Lambda^*(\widetilde{K_1}(G));$$

с другой стороны, $K_*^{\mathrm{top}}(\mathbb{C})[[\rho_1],\dots,[\rho_n]]/(\dots)$.