Framed motives

Иван Панин

13.11.2014

1 Некоторые гомотопии

Теорема 1.1. Пусть $\varnothing \neq V \subseteq U \subseteq \mathbb{A}^1_k$ — два непустых открытых подмножества, $i\colon V \to U$ — вложение. Тогда существует морфизм $r \in \overline{\mathbb{Z}F}(U,V)$ такой, что $[i] \circ [r] = [\mathrm{id}_U]$ в $\overline{\mathbb{Z}F}(U,U)$.

Мы будем постепенно доказывать эту теорему.

Локальная цель — доказать следующее

Предложение 1.2. Пусть $\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{A}^1_k$ — открытое подмножество.

$$\begin{tikzcd}
 & U \times U \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[ddr] & \mathbb{A}^1 \\
U \times \mathbb{A}^1 & \Delta(U) \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & \\
 & U & U
\end{tikzcd}$$

Существует m_0 (зависящее от U) такое, что для всех $n \geq m_0$ выполнено

$$[\Delta(U), U \times U \xrightarrow{(Y-X)^{2n+1}} \mathbb{A}^1, p_2] = [\Delta(U), U \times U \xrightarrow{(Y-X)^{2n}} \mathbb{A}^1, p_2] + [\mathrm{id}_U]$$

в $\overline{\mathbb{Z}F}_1(U,U)$.

Допустим, что это предложение верно. Выведем теорему.

Лемма 1.3. Пусть $A = \mathbb{A}^1 - U$. Для любого $m \geq m_0$ существует многочлен $F_m(Y) \in k[U][Y]$ такой, что

1. $\deg_Y(F_m(Y)) = m$ и $F_m(Y) = Y^m + \ldots$;
2. $F_m(Y)|_{U\times A} = (Y-X)^m|_{U \times A}$ в $k[U \times A]^*$.
3. $F_m(Y)|_{U \times B} = 1$.

Рассмотрим данные $(\{F_m = 0\}, U \times V \xrightarrow{F_m} \mathbb{A}^1, p_V)$ в $\mathbb{Z}F(U,V)$.

$$\begin{tikzcd}
 & U \times V \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[ddr] & \mathbb{A}^1 \\
U \times \mathbb{A}^1 & \{F_m = 0\} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & \\
 & U & V
\end{tikzcd}$$

Лемма 1.4. $\overline{[i]} \circ \overline{[r_m]} = [\Delta(U), U \times U \xrightarrow{(Y-X)^m} \mathbb{A}^1, p_2\colon U \times U \to U]$.

Доказательство. Напишем конкретную гомотопию: пусть $H_\theta^{(m)} = (1-\theta)\cdot F_m + \theta(Y-X)^m$, тогда $[\{H_\theta^{(m)} = 0\}, \mathbb{A}^1\times U\times U \xrightarrow{H_\theta^{(m)}} \mathbb{A}^1, \mathbb{A}^1\times U\times U \xrightarrow{\mathrm{pr}_3} U]$ лежит в $\overline{\mathbb{Z}F}(\mathbb{A}^1\times U, U)$, где (θ, X, Y) — координаты на $\mathbb{A}^1\times U\times U$. Ясно, что $H_1^{(m)} = (\Delta(U), U\times U \xrightarrow{(Y-X)^m} \mathbb{A}^1, p_2)$ и $H_0^{(m)} = \overline{[i]}\circ\overline{[r_m]}$. Положим $r = [r_{2n+1}] - [r_{2n}] \in \overline{\mathbb{Z}F}(U,V)$. Тогда

$$\begin{aligned}[i]\circ[r] &= [i]\circ[r_{2n+1}] - [i]\circ[r_{2n}]\\ &= [\Delta(U), (Y-X)^{2n+1}, p_2] - [\Delta(U), (Y-X)^{2n}, p_2]\\ &= [\mathrm{id}_U]\end{aligned}$$

в $\overline{\mathbb{Z}F}(U,U)$ по предложению 1.2. □

Лемма 1.5. $[\Delta(U), (Y-X)^m, p_2] = [\Delta(U), (Y-X)^m, p_1]$ в $\overline{\mathbb{Z}F}(U,U)$, где, как всегда, $U\subseteq\mathbb{A}^1$.

Доказательство. Рассмотрим проекции $p_i\colon U\times U\to U$, $p_1|_{\Delta(U)} = p_2|_{\Delta(U)}$. Пусть $H = (1-\theta)p_2 + \theta p_1$. Рассмотрим $[\mathbb{A}^1\times\Delta(U), \mathbb{A}^1\times U\times U \xrightarrow{(Y-X)^m} \mathbb{A}^1, (1-\theta)p_2+\theta p_1\colon \mathbb{A}^1\times U\times U\to\mathbb{A}^1]$. Заметим, что $H|_{\mathbb{A}^1\times\Delta} = p_1\circ\mathrm{pr}_\Delta = p_2\circ\mathrm{pr}_\Delta\colon \mathbb{A}^1\times\Delta\to\Delta\to U$. Положим

$$[H_\theta] = [\mathbb{A}^1\times\Delta(U), H^{-1}(U) \xrightarrow{(Y-X)^m} \mathbb{A}^1, H|_{H^{-1}(U)}\colon H^{-1}(U)\to U].$$

Осталось заметить, что $[H_1] = [i]$, $[H_0] = [0]$ (ну, или наоборот). □

Продолжим доказывать предложение 1.2. Мы уже показали, что

$$\begin{aligned}[\Delta(U), U\times U \xrightarrow{(Y-X)^{2n+1}} \mathbb{A}^1, p_2] &= [\Delta(U), (Y-X)^{2n+1}, p_1]\\ &= [\Delta(U), U\times\mathbb{A}^1 \xrightarrow{(Y-X)^{2n+1}} \mathbb{A}^1, p_1]\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}[\Delta(U), U\times U \xrightarrow{(Y-X)^{2n}} \mathbb{A}^1, p_2] &= [\Delta(U), (Y-X)^{2n}, p_1]\\ &= [\Delta(U), U\times\mathbb{A}^1 \xrightarrow{(Y-X)^{2n}} \mathbb{A}^1, p_1]\end{aligned}$$

по лемме 1.5.

У нас есть запас морфизмов в $\overline{\mathbb{Z}F}(U,U)$ вида $[\{F(Y)=0\}, U\times\mathbb{A}^1, p_1]$, где $F(Y)\in k[U][Y]$.

Лемма 1.6. Если $d = \deg_Y(F(Y)) = \deg_Y(G(Y))$ и оба унитарны по Y, то $[\{F(Y)=0\}, U\times\mathbb{A}^1 \xrightarrow{F(Y)} \mathbb{A}^1, p_1] = [\{G(Y)=0\}, U\times\mathbb{A}^1 \xrightarrow{G(Y)} \mathbb{A}^1, p_1]$ в $\overline{\mathbb{Z}F}(U,U)$.

Доказательство. Положим $H_\theta = (1-\theta)F(Y) + \theta G(Y)$. Достаточно рассмотреть $[H_\theta] = [\{H_\theta = 0\}, U\times\mathbb{A}^1 \xrightarrow{H_\theta} \mathbb{A}^1, \mathbb{A}^1\times U\times\mathbb{A}^1 \xrightarrow{\mathrm{pr}_U} U] \in \overline{\mathbb{Z}F}(\mathbb{A}^1\times U, U)$. □

Возвращаясь к доказательству предложения 1.2, замечаем, что по лемме 1.6 теперь

$$[\Delta(U), U\times\mathbb{A}^1 \xrightarrow{(Y-X)^{2n+1}} \mathbb{A}^1, p_1] = [U\times 0, U\times\mathbb{A}^1 \xrightarrow{Y^{2n+1}}, p_1]$$

и

$$[\Delta(U), U\times\mathbb{A}^1 \xrightarrow{(Y-X)^{2n}} \mathbb{A}^1, p_1] = [U\times 0, U\times\mathbb{A}^1 \xrightarrow{Y^{2n}}, p_1].$$

Обозначим $[m, U] = [U\times 0, U\times\mathbb{A}^1 \xrightarrow{Y^m}, p_1]$ (это уже имеет смысл для любого U). Кроме того, $[\mathrm{id}_U] = [U\times 0, U\times\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1, p_1] = [1, U]$. Осталось доказать, что $[2n+1, U] = [2n, U] + [1, U]$ в $\overline{\mathbb{Z}F}(U,U)$.

Лемма 1.7. Равенство $[2n+1, U] = [2n, U] + [1, U]$ справедливо для любого $U\in\mathrm{Sm}/k$.

Доказательство. Докажем это равенство для $U = \mathrm{pt} = \mathrm{Spec}(k)$, а потом домножим все на U и получим доказательство для произвольного U.

Теперь мы не будем писать всяческие проекции, поскольку они стреляют в pt. Заметим, что $[\{0\}, Y^{2n+1}] = [\{Y^{2n+1} + Y^{2n} = 0\}, Y^{2n+1} + Y^{2n}]$ по лемме 1.6. Далее, $Y^{2n+1} + Y^{2n} = Y^{2n}(Y+1)$, поэтому

$$\begin{aligned}
[\{0\}, Y^{2n+1}] &= [\{Y^{2n+1} + Y^{2n} = 0\}, Y^{2n+1} + Y^{2n}] \\
&= [\{Y^{2n}(Y+1) = 0\}, Y^{2n}(Y+1)] \\
&= [\{0\}, \mathbb{A}^1 - \{-1\} \xrightarrow{Y^{2n}(Y+1)} \mathbb{A}^1] + [\{-1\}, \mathbb{A}^1 - \{0\} \xrightarrow{(Y+1)Y^{2n}} \mathbb{A}^1].
\end{aligned}$$

Положим $H_\theta = (1-\theta)(Y+1) + \theta$. Заметим, что $(Y+1)(0) = 1$ и $1(0) = 1$. Поэтому $[\{0\}, \mathbb{A}^1 - \{-1\} \xrightarrow{Y^{2n}(Y+1)} \mathbb{A}^1] = [\{0\}, \mathbb{A}^1 - \{-1\} \xrightarrow{Y^{2n}} \mathbb{A}^1] = [2n, \mathrm{pt}]$. Наконец, можно написать гомотопию $H_\theta = (1-\theta)Y^{2n} + \theta$ (поскольку $Y^{2n}|_{-1} = 1|_{-1} = 1$), и получим, что

$$\begin{aligned}
[\{-1\}, \mathbb{A}^1 - \{0\} \xrightarrow{(Y+1)Y^{2n}} \mathbb{A}^1] &= [\{-1\}, \mathbb{A}^1 - \{0\} \xrightarrow{(Y+1)} \mathbb{A}^1] \\
&= [\{-1\}, \mathbb{A}^1 \xrightarrow{Y+1} \mathbb{A}^1] \\
&= [1, \mathrm{pt}]
\end{aligned}$$

по лемме 1.6. □

Напомним, что из теоремы 1.1 следует такое полезное утверждение.

Следствие 1.8. Если $\varnothing \neq V \subseteq U \subseteq \mathbb{A}^1$, то $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{i^*} \mathcal{F}(V)$ инъективно для любого предпучка $\mathcal{F}\colon \overline{\mathbb{Z}F}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$.

Теорема 1.9. Пусть $Z \subseteq V$ — замкнутое вложение, $i\colon V \to U$ — открытое вложение, $U \subseteq \mathbb{A}^1$ — открытое в $\mathbb{A}^1$. Тогда $\overline{[i]}\colon (V, V-Z) \to (U, U-Z)$ в $\overline{\overline{\mathbb{Z}F}}^{\mathrm{pr}}(k)$ — изоморфизм.

Следствие 1.10. Для любого предпучка $\mathcal{F}\colon \overline{\mathbb{Z}F}(k) \to \mathrm{Ab}$ отображение $\mathcal{F}(U-Z)/\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V-Z)/\mathcal{F}(V)$ является изоморфизмом

Определение 1.11.

$$\begin{tikzcd}
 & V_0 \arrow[r, hook] & V \arrow[rr] \arrow[dll, "\rho"'] \arrow[ddrr, "g"] & & \mathbb{A}^n \\
X \times \mathbb{A}^n & Z_0 \arrow[u, "j_0"] \arrow[r, hook] \arrow[d] & Z \arrow[u, "j"'] \arrow[ll, bend right] \arrow[d] & & \\
 & X_0 \arrow[r, hook] & X & Y_0 \arrow[r, hook] & Y
\end{tikzcd}$$

Положим $p_X = \mathrm{pr}_X \circ \rho\colon V \to X$. Будем говорить, что соответствие $[Z, \underline{\varphi}, g]|_{X_0}\colon X_0 \to Y$ **протекает** в Y_0, если $g(j(Z_0)) \subseteq Y_0$.

Лемма 1.12. Пусть $\alpha = [Z, \underline{\varphi}, g]$. Если $[Z, \underline{\varphi}, g]|_{X_0}$ протекает в Y_0, то существует единственное $\beta \in \mathbb{Z}F_*(X_0, Y_0)$ такое, что $i_Y \circ \beta = \alpha \circ i_X$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] & Y \\
X_0 \arrow[u, hook, "i_X"] \arrow[r, "\beta"] & Y_0 \arrow[u, hook, "i_Y"']
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Рассмотрим $g^{-1}(Y_0) \subseteq V$. Это подмножество содержит $j(Z_0)$. Поэтому возникает $g^{-1}(Y_0) \cap V_0 \to Y_0$, и есть соответствие $\beta = [Z_0, g^{-1}(Y_0) \cap p_X^{-1}(X_0) \xrightarrow{\underline{\varphi}} \mathbb{A}^n, g_0]$, где $g_0 = g|_{g^{-1}(Y_0) \cap p_X^{-1}(X_0)}$. Очевидно, что $i_Y \circ \beta = \alpha \circ i_X$. Единственность несложно показать. □

Если $\alpha\colon X \to Y$ такой, что $\alpha|_{X_0}$ протекает в Y_0, то положим $[[\alpha]] = (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}F_*((X, X_0), (Y, Y_0))$.

Предложение 1.13. Пусть $\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{A}^1_k$ — открытое подмножество, $Z \subseteq U$ — замкнутое в U. Тогда суеществует m_0 (зависящее от U) такое, что для любого $n \geq m_0$ имеет место равенство

$$[[\Delta(U), U \times U \xrightarrow{(Y-X)^{2n+1}} \mathbb{A}^1, p_2]] = [[\Delta(U), U \times U \xrightarrow{(Y-X)^{2n}} \mathbb{A}^1, p_2]] + [[\mathrm{id}_U]]$$

в $\overline{\mathbb{Z}F}^{\mathrm{pr}}((U, U-Z), (U, U-Z))$.

Доказательство. Нужно проследить, что все гомотопии из доказательства предложения 1.2 протекают в нужных открытых подмножествах. $\square$

Доказательство теоремы 1.9. Сначала построим r'' из $(U, U-Z)$ в $(V, V-Z)$ такой, что $\overline{[[r'']]} \circ \overline{[[i]]} = [[\mathrm{id}_{(V,V-Z)}]]$. Обозначим $B = U - V$, $A = \mathbb{A}^1 - U$.

Лемма 1.14. Для любого достаточно большого m существует $F_1(Y) \in k[U][Y]$ такой, что

1. $F_1(Y) = Y^m + \dots$, то есть, $\deg_Y(F_1(Y)) = m$;
2. $F_1(Y)|_{U \times (A \coprod B)} = 1$;
3. $F_1(Y)|_{U \times Z} = (Y - X)|_{U \times Z}$.

Построение r'': $[[r'']] = [[\{F_1 = 0\}, U \times V \xrightarrow{F_1} \mathbb{A}^1, p_V]] \in \mathbb{Z}F_*^{\mathrm{pr}}((U, U-Z), (V, V-Z))$. Заметим, что в $(U - Z) \times Z$ нет диагональных точек, поэтому $F_1|_{(U-Z)\times Z}$ лежит в $k[(U-Z) \times Z]^*$. Значит, $r''|_{U-Z} \colon U - Z \to V - Z$.

Лемма 1.15. Существует $F_0 = G(Y) \cdot (Y - X) \in k[V][Y]$ такой, что

1. $G(Y) = Y^{m-1} + \dots$;
2. $G(Y)|_{V \times Z \cup \Delta(V)} = 1$;
3. $G(Y)|_{V \times (A \coprod B)} = (Y - X)^{-1}|_{V \times (A \coprod B)}$.

Тогда $\{F_0 = 0\} = \{G = 0\} \coprod \Delta(V)$, поскольку $G(Y)$ на диагонали равно 1. Кроме того, $\{G = 0\} \subseteq V \times (V - Z)$ в силу второго условия леммы 1.15. Поэтому $\{F_0 = 0\} \cap (V - Z) \times \mathbb{A}^1$. Пусть $H_\theta = (1-\theta)F_0 + \theta(F_1|_V \times \mathbb{A}^1) \in k[V][\theta]$. Тогда $[\{H_\theta = 0\}, \mathbb{A}^1 \times V \xrightarrow{H_\theta} \mathbb{A}^1, \mathbb{A}^1 \times V \times V \xrightarrow{\mathrm{pr}_3} V]|_{V-Z}$ протекает в $V - Z$, и потому $[[\{H_\theta = 0\}, \mathbb{A}^1 \times V \xrightarrow{H_\theta} \mathbb{A}^1, \mathbb{A}^1 \times V \times V \xrightarrow{\mathrm{pr}_3} V]]$ лежит в $\overline{\mathbb{Z}F}((V, V-Z), (V, V-Z))$.

Заметим, что $[[H_1]] = \overline{[[r'']]} \circ \overline{[[i]]}$ и $[[H_0]] = [[\Delta(V), V \times V - \{G = 0\} \xrightarrow{G\cdot(Y-X)} \mathbb{A}^1, \mathrm{pr}_2]] + [[\{G = 0\}, V \times V - \Delta(V) \xrightarrow{G\cdot(Y-X)} \mathbb{A}^1, \mathrm{pr}_2]]$ в $\overline{\mathbb{Z}F}(V, V-Z)$. Второе слагаемое равно нулю в $\overline{\overline{\mathbb{Z}F}}((V, V-Z), (V, V-Z))$. Первое слагаемое — это то, что нам нужно; оно равно

$$\begin{aligned}
[[\Delta(V), V \times V \xrightarrow{Y-X} \mathbb{A}^1, \mathrm{pr}_2]] &= [[\Delta(V), V \times V \xrightarrow{Y-X} \mathbb{A}^1, \mathrm{pr}_1]] \\
&= [[\Delta(V), V \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{Y-X} \mathbb{A}^1, \mathrm{pr}_1]] \\
&= [[V \times 0, V \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{Y} \mathbb{A}^1, \mathrm{pr}_1]] \\
&= [[\mathrm{id}_V]]
\end{aligned}$$

Вторая часть теоремы 1.9: нужно построить $r' \in \overline{\overline{\mathbb{Z}F}}^{\mathrm{pr}}(k)$ так, чтобы композиция $[[i]] \circ [[r']]$ оказалась тождественной. Условно говоря, здесь нужно использовать, что $[[(Y-X)^{2n+1}]] - [[(Y-X)^{2n}]] = \mathrm{id}_{U,U-Z}$. $\square$