Стабильные операции и кооперации в K-теории

Алексей Ананьевский

04.12.2014

1 K-теория пространств

Мы будем говорить про комплексную, вещественную (классически известно), алгебраическую (тоже давно известно) и эрмитову K-теорию (это новое вычисление).

Определение 1.1. Пусть X — хорошее топологическое пространство (например, конечный CW-комплекс). Тогда

$$K^0(X) = \bigoplus_{\mathcal{E}} \mathbb{Z}[\mathcal{E}] \Big/ \langle [E'] + [E''] = [E'], 0 \to E' \to E \to E'' \to 0 \rangle.$$

Если (X, x) — пространство с отмеченной точкой, то $K^0(X, x) = \widetilde{K^0}(X) = \operatorname{Ker}(K^0(X) \to K^0(\{x\}) = \mathbb{Z})$.

Теорема 1.2. Если X связно, то $\widetilde{K^0}(X) = \operatorname{Hom}_{H_\bullet}((X, x), B\,\mathrm{GL})$, $K^0(X) = \operatorname{Hom}_H(X, \mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL})$.

Определение 1.3. Положим $\mathrm{Gr}(n, \infty) = \varinjlim_m \mathrm{Gr}(n, m)$, где подразумевается, что $\mathrm{Gr}(n, m)$ канонически вложено в $\mathrm{Gr}(n, m+1)$ с помощью вложения $\mathbb{C}^m \leq \mathbb{C}^{m+1}$. Тогда $B\,\mathrm{GL} = \mathrm{Gr}(\infty, \infty) = \varinjlim_n \mathrm{Gr}(n, \infty)$, где подразумевается, что $\mathrm{Gr}(n, \infty)$ канонически вложено в $\mathrm{Gr}(n+1, \infty)$ посредством $(V \leq \mathbb{C}^\infty) \mapsto (\mathbb{C} \oplus V) \leq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^\infty)$. Можно сразу написать $B\,\mathrm{GL} = \varinjlim_{m,n} \mathrm{Gr}(n, m)$. В этом пространстве отмечена точка $\mathrm{Gr}(1, 1) = \mathrm{pt}$.

Определение 1.4. Операция на K^0 — это естественное преобразование $K^0(-) \to K^0(-)$.

Теорема 1.5. Операции на K^0 образуют $\prod_{n \in \mathbb{Z}}(K^0(\mathrm{pt})[])$.

Доказательство. По лемме Йонеды нам нужно посчитать

$$\operatorname{Hom}_H(\mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL}, \mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL}) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_H(B\,\mathrm{GL}, \mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL}) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} K^0(B\,\mathrm{GL}).$$

Напишем точную последовательность Милнора

$$0 \to \lim{}^1 \to \varprojlim_{n,m} K^0(\mathrm{Gr}(n, m)) \to K^0(B\,\mathrm{GL}) \to 0.$$

□

Определение 1.6. Пусть L/X — линейное расслоение. Определим $c_1(L) = 1 - [L^\vee] \in K^0(X)$ — **первый класс Черна** расслоения L.

Теорема 1.7. Пусть $\mathcal{E}/X$ — векторное расслоение ранга $n+1$. тогда $K^0(\mathbb{P}(\mathcal{E})) = K^0(X) \oplus K^0(X) \cdot c_1(\mathcal{O}(-1)) \oplus \cdots \oplus K^0(X)(x)_1(\mathcal{O}(-n))$.

Поэтому $(c_1(\mathcal{O}(-1)))^{n+1} - a_1(c_1(\mathcal{O}(-1)))^n + a_2(c_1(\mathcal{O}(-1)))^{n-1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n+1}$. Положим $c_1(\mathcal{E}) = a_1$, $c_2(\mathcal{E}) = a_2, \ldots, c_{n+1}(\mathcal{E}) = a_{n+1}$.

Имеет место мультипликативность полного класса Черна: если $\mathcal{E}/X$ — векторное расслоение ранга n, то $c_*(\mathcal{E}) = 1 + c_1(\mathcal{E}) + \cdots + c_n(\mathcal{E})t^n \in K^0(X)[t]$ — полный класс Черна расслоения $\mathcal{E}$. Мультипликативность означает, что для короткой точной последовательности расслоений $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ выполнено $c_*(\mathcal{E}') \cdot c_*(\mathcal{E}'') = c_*(\mathcal{E})$.

Принцип расщепления: если $\mathcal{E}/X$ — векторное расслоение ранга n, то существует $p\colon Y \to X$ такое, что

- $p^*\colon K^0(X) \to K^0(Y)$ инъективно

- $p^*(\mathcal{E}) \cong L_1 \oplus \dots \oplus L_n$, где $L_1, \dots, L_n$ — линейные расслоения над Y.

В качестве Y можно брать что-то вроде многообразия флагов. Тогда

$$c_*(\mathcal{E}) = \prod_i c_*(L_i) = \prod_i (1 + c_1(L_i)t) = 1 + \sigma_1(c_1(L_1), \dots, c_1(L_n))t + \sigma_2(c_1(L_1), \dots, c_1(L_n))t^2 + \dots.$$

Значит, $c_m(\mathcal{E}) = \sigma_m(c_1(L_1), \dots, c_1(L_n))$.

Еще одно свойство: c_* продолжается до отображения $c_*\colon K^0(X) \to (K^0(X)[[t]])^*$, которое сумму переводит в произведение (то есть, гомоморфизм групп). На самом деле образ лежит в множестве рядов с единичным свободным членом.

В частности, есть операция $c_i\colon K^0(X) \to K^0(X)$. $c_i(\mathcal{E} - 1^n) = c_i(\mathcal{E})$ (тут нужно учесть, что полный класс Черна тривиального расслоения равен единице).

Теорема 1.8.

$$K^0(\mathrm{Gr}(n,m)) = K^0(\mathrm{pt})[c_1, \dots, c_n]/\langle h_{m-n+1}(c_1, \dots, c_n), \dots, h_m(c_1, \dots, c_n)\rangle,$$

где $h_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ — полные симметрические многочлены от тех переменных, от которых $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — элементарные симметрические. При этом равенстве $c_i(\tau_n)$ слева соответствует c_i справа, где τ_n — тавтологическое расслоение на $\mathrm{Gr}(n,m)$.

Замечание 1.9. Есть точная последовательность $0 \to \tau_n \to 1^m \to \tau_{m-n} \to 0$. Поэтому $c_*(\tau_n) \cdot c_*(\tau_{n-m}) = c_*(1^m) = 1$. По принципу расщепления теперь $c_*(\tau_{m-n} = (c_*(\tau_n))^{-1} = (\prod_{i=1}^n (1 + \xi_i t))^{-1}$, где $\xi_i = c_1(L_i)$. Это равно $\prod_{i=1}^n (1 - \xi_i t + \xi_i^2 t^2 - \xi_i^3 t^3 + \dots) = 1 - h_1 t + h_2 t^2 - h_3 t^3$. Отсюда $(-1)^i h_i = c_i(\tau_{m-n})$.

Окончание доказательства теоремы 1.5. Мы посчитали $K^0 * \mathrm{Gr}(n,m)$; осталось устремить n и m к бесконечности. Оказывается, получается то, что нужно: $K^0(\mathrm{pt})[[c_1, c_2, \dots]]$. $\square$

Определение 1.10. **Операции Адамса** — это такие операции $\psi_n\colon K^0(-) \to K^0(-)$, что

- ψ_n — гомоморфизм колец;

- $\psi_n(L) = L^{\otimes n}$ для любого линейного расслоения L.

Операции с такими свойствами определены однозначно (если они вообще существуют) по принципу расщепления. С другой стороны, мы посчитали все операции, так что операции Адамса должны быть многочленами от $(c_1, \dots, c_n)$ — но не однородными.

2 K-теория спектров

Определение 2.1. Положим $K^{-n}(X) = \widetilde{K^0}(S^n \wedge X_+)$ при $n \geq 0$, где $X_+ = X \coprod \{+\}$.

Теорема 2.2. $\widetilde{K^0}(X_+ \wedge S^2) = K^0(X) \cdot (1 - [\mathcal{O}(1)])$, где $S^2 = \mathbb{CP}^1$.

Теорема выводится из теоремы о проективизированном расслоении. Из теоремы 2.2 следует **периодичность Ботта**: $K^{-n-2}(X) \cong K^{-n}(X)$

Определение 2.3. **Спектр K-теории** — это S^2-спектр $\mathbb{K} = (\mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL}, \mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL}, \dots)$ с отображениями $\sigma\colon S^2 \wedge (\mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL}) \to \mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL}$. Отображение σ является композицией отображения $S^2 \wedge (\mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL}) \to 0 \times B\,\mathrm{GL}$ и вложения $0 \times B\,\mathrm{GL} \hookrightarrow \mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL}$.

Осталось придумать отображение из $S^2 \wedge (\mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL})$ в $0 \times B\,\mathrm{GL}$, то есть, элемент в $K^0(S^2 \wedge (\mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL})$. Вспомним, что $\tau_n - 1^n$ было расслоением на $\mathrm{Gr}(n, \infty)$; это в точности пулбэк $\tau_{n+1} - 1^{n+1}$ на $\mathrm{Gr}(n+1, \infty)$. Поэтому можно рассмотреть $\tau_\infty - 1^\infty$ (это универсальный элемент в $K^0(B\,\mathrm{GL})$. Рассмотрим $(1 - \mathcal{O}(1)) \otimes (\tau_\infty - 1^\infty)$; он задаст отображение $S^2 \times (\mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL}) \to 0 \times B\,\mathrm{GL}$, и из него получится нужное отображение.

Примерно такой же спектр пишется и в алгебраической K-теории.

Теорема 2.4. $K^{-n}(X) = \mathrm{Hom}_{SH}(\Sigma^\infty X_+[n], \mathbb{K}) = \varinjlim_{2m} \mathrm{Hom}_{H_\bullet}(S^{2m+n} \wedge X_+, \mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL})$. Последнее равенство выполнено, если X компактное.

Теперь можно принять полученное равенство за определение K-теории (уже с любым номером).

Определение 2.5. $K^n(E) = \mathrm{Hom}_{SH}(E[-n], \mathbb{K})$, $K^*(E) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} K^n(E)$.

Теперь можно переписать периодичность Ботта: существует элемент $\beta \in K^2(\mathrm{pt})$ такой, что $K^n(E) \xrightarrow{\cdot\beta} K^{n+2}(E)$ — изоморфизм для всех n. Более того, если выбрать β так, что $\beta^{-1} \in K^{-2}(\mathrm{pt}) = \widetilde{K^0}(S^2)$ совпадает с $1 - [\mathcal{O}(1)]$, то такой β единственный. Другими словами, $\beta \cdot (1 - [\mathcal{O}(1)]) = \sigma^2(1)$ в $K^2(S^2)$.

3 Стабильные операции и кооперации

Определение 3.1. **Стабильные операции** — это $\mathbb{K}^*\mathbb{K} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{SH}(\mathbb{K}[-n], \mathbb{K})$. **Стабильные кооперации** — это $\mathbb{K}_*\mathbb{K} = \pi_*(\mathbb{K} \wedge \mathbb{K}) = \bigoplus \mathrm{Hom}(\mathbb{S}[n], \mathbb{K})$. **$K$-гомологии** спектра E — это $K_*E = \pi_*(K \wedge E)$.

См. Adams, Harris, Switzer, “Hopf algebras of cooperations for real and complex K-theory”.

Замечание 3.2. $\mathbb{K} \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{HQ}[2n]$, где $\mathbb{HQ}$ — спектр Эйленберга–Маклейна.

Посчитаем $K^0_{\mathbb{Q}}\mathbb{K} = \mathrm{Hom}(\bigoplus_n \mathbb{HQ}[2n], \bigoplus_m \mathbb{HQ}[2m])$. Заметим, что такие отображения есть только для $n = m$. Поэтому $K^0_{\mathbb{Q}}\mathbb{K} = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Отсюда $K^*_{\mathbb{Q}}\mathbb{K} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}(\prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \cdot \beta^m$.

Замечание 3.3. $\mathbb{K}_*\mathbb{K} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[\beta_1, \beta_2, \beta_1^{-1}, \beta_2^{-1}]$. Дело в том, что $\mathbb{K}_*\mathbb{K} \otimes \mathbb{Q} = \pi_*(\mathbb{K}_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\pi_*(\mathbb{S})_{\mathbb{Q}}} \pi_*(\mathbb{K}_{\mathbb{Q}})$.

Замечание 3.4. Пусть $E = (E_0, E_2, E_4, \dots)$ — S^2-спектр. Рассмотрим спектр $\Sigma^\infty E_{2n}[-2n] = (\mathrm{pt}, \mathrm{pt}, \dots, E_{2n}, S^2 \wedge E_{2n}, \dots)$. Тогда $E = \varinjlim \sigma^\infty E_{2n}[-2n]$.

Лемма 3.5. Есть точная последовательность

$$0 \to \lim{}^1 \to \varprojlim \mathrm{Hom}(\Sigma^\infty E_{2n}[-2n], F) \to\!\!\to \mathrm{Hom}(E, F) \to 0.$$

Теорема 3.6. $\mathbb{K}^*_{\mathbb{Q}}\mathbb{K} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}((\prod_{m\in\mathbb{Z}} \mathbb{Q})\beta^n)$.

Доказательство. Покажем, что $\mathbb{K}^0_{\mathbb{Q}}\mathbb{K} = \prod_{m\in\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Нужно посчитать $\varprojlim_n \widetilde{K}^{2n}(\mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL})$. Построим отображение $K^{2n+2}(\mathbb{Z}\times B\,\mathrm{GL}) \to K^{2n}(\mathbb{Z}\times B\,\mathrm{GL}) \cong \widetilde{K}^{2n+2}(S^2\wedge(\mathbb{Z}\times B\,\mathrm{GL}))$; последний изоморфизм — это изоморфизм надстройки, то есть, умножение на $\Sigma^2 1 = \beta(1 - \mathcal{O}[1])$. Заметим, что есть естественный морфизм $\Sigma^\infty E_{2n}[-2n] \to \Sigma^\infty E_{2n+2}[-2n-2]$. Поэтому есть стрелка $\sigma^*\colon K^{2n+2}(\mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL}) \to K^{2n+2}(S^2 \wedge (\mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL}))$.

Напомним, что структурное отображение $S^2 \wedge (\mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL}) \to \mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL})$ пропускалось через $0 \times B\,\mathrm{GL}$. Есть не очень коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
S^2 \wedge (\mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL}) \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr] & & \mathbb{Z} \times B\,\mathrm{GL} \\
S^2 \wedge B\,\mathrm{GL} \arrow[rr, "(1-\mathcal{O}[1])\otimes(\tau_\infty - 1^\infty)"'] & & 0 \times B\,\mathrm{GL} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

(не очень коммутативная, поскольку мы слегка замяли проблемы с рангом).

Придумаем отображение $\widetilde{K}^*(B\,\mathrm{GL}) \to \widetilde{K}^*(S^2 \wedge B\,\mathrm{GL})$. Левая часть равна $K^*\widetilde{(\mathrm{pt})[[c_1}, \dots]]$; правая часть равна $K^*(\mathrm{pt})[[c_1 \dots, c_n]] \cdot (1 - \mathcal{O}[1])$. Заметим, что $(1 - \mathcal{O}[1])^2 = 0$; это кольцо с нулевым умножением. Например, c_1c_2 слева попадет в 0 справа. Наше отображение пропускается через неразложимые элементы. Поэтому остается неразложимый фактор $K^*(\mathrm{pt})[[c_1, \dots]] \to \prod_{i=1}^\infty K^*(\mathrm{pt}) \cdot c_i$. Получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K^*(\mathrm{pt})[[c_1, \dots]] \arrow[r] \arrow[d] & K^*(\mathrm{pt})[[c_1, \dots, c_n]] \cdot (1 - \mathcal{O}[1]) \arrow[d] \\
\prod_{i=1}^\infty K^*(\mathrm{pt}) \cdot c_i \arrow[r] & \prod_{i=1}^\infty K^*(\mathrm{pt}) \cdot c_i
\end{tikzcd}$$

При этом $c_*(\tau_\infty - 1^\infty) \mapsto c_*(1 - \mathcal{O}(1)) \otimes (\tau_\infty - 1^\infty)$. Заметим, что аналогичное вычисление можно провести в когомологиях: $ch((\tau_\infty - 1^\infty) \mapsto ch((1 - \mathcal{O}(1)) \otimes (\tau_\infty - 1^\infty)) = ch(1 - \mathcal{O}(1)) \otimes ch(\tau_\infty - 1^\infty) = H \cdot ch(\tau_\infty - 1^\infty)$, где $H = c_1^H(1 - \mathcal{O}(1))$ — гиперплоское сечение.

Для расслоения E/X выполнено $ch(E) = \operatorname{rk} E + S_1/1! + S_2/2! + S_3/3! + \dots$, где $S_n = \sum (c_1^H(L_i))^n$. Часть $ch(E)$ в H^{2n} равна $S_n/n!$; она переходит в $HS_{n-1}/(n-1)!$ — это часть $H \cdot ch(\tau_\infty - 1^\infty)$ в H^{2n}. При этом $S_1 \mapsto H \cdot S_0 = 0$, $S_2/2 \mapsto H \cdot S_1$.

Еще одна нужная формула: $nc_n = (-1)^{n+1} S_n + \dots$. Получаем отображение

$$\prod H^(\mathrm{pt})c_i \to \prod H^*(\mathrm{pt})c_i$$

с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Таким образом, происходит просто сдвиг (с точностью до изоморфизмов на кусочках), то есть, отображения $\prod_{i \geq 0} \mathbb{Q} \to \prod_{i \geq 0} \mathbb{Q}$, у каждого из которых такая матрица. В пределе получаем $\prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, поскольку можно перенумеровать базис так, что получатся отображения

$$\dots \to \prod_{i \geq -2} \mathbb{Q} \to \prod_{i \geq -1} \mathbb{Q} \to \prod_{i \geq 0} \mathbb{Q}.$$

Все эти отображения сюръективны, поэтому $\lim^1$ умирает.

Для K-теории все то же самое, только нужно аккуратно посчитать. Там тоже есть S_i, и $S_i \mapsto S_i - S_{i-1}$. Получается матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Нетрудно видеть, что задаваемое ей отображение снова сюръективно, и имеет одномерное ядро. Так что все получится. □

Лемма 3.7. $c_*((1 - \mathcal{O}(1)) \otimes (\tau_\infty - 1^\infty))$ можно посчитать.

Доказательство. Заметим, что $\tau_\infty - 1^\infty = (L_1 - 1) \oplus (L_2 - 1) + \dots$. Обозначим $\xi_i = c_1(L_i)$, $e = c_1(\mathcal{O}(1))$. Заметим, что $e^2 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} c_*(1 - \mathcal{O}(1)) \otimes (\tau_\infty - 1^\infty)) &= \frac{c_*(\tau_\infty - 1^\infty)}{c_*((\tau_\infty - 1^\infty) \otimes \mathcal{O}(1))} \\ &= \frac{\prod_{i \in \mathbb{N}} (1 + \xi_i t)}{\prod_{i \in \mathbb{N}} c_*(L_i \otimes \mathcal{O}(1) - \mathcal{O}(1))} \\ &= \frac{\prod_{i \in \mathbb{N}} (1 + \xi_i t)}{\prod_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_*(L_i \otimes \mathcal{O}(1))}{c_*(\mathcal{O}(1))}} \\ &= \frac{\prod_{i \in \mathbb{N}} (1 + \xi_i t)}{\prod_{i \in \mathbb{N}} \frac{(1 + (\xi_i + e - \xi_i e) t)}{1 + et}} \\ &= \prod_{i \in \mathbb{N}} \frac{1 + \xi_i t}{1 + (\xi_i - \xi_i e) t - \xi_i e t^2} \\ &= 1 - S_1 e t + (S_1 - S_2) e t^2 - (S_2 - S_3) e t^2 + (S_3 - S_4) e t^4 + \dots . \end{aligned}$$

Это значит, что $c_i \mapsto (-1)^i (S_i - S_{i-1})$, как и обещалось. □

Для коопераций вычисления похожие: можно показать, что $\mathbb{K}_* B\,\mathrm{GL} = K^*(\mathrm{pt})[\gamma_1, \dots]$; получаем отображения с матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Это инъективное отображение с одномерным коядром; после замены базиса можно считать, что это отображение $\mathbb{Q}[x] \xrightarrow{\cdot x} \mathbb{Q}[x]$, и нужно посчитать прямой предел. Ответ: $\mathbb{Q}[x, x^{-1}]$. Здесь γ_i — двойственный базис: $\langle \gamma_i, c_1^j \rangle = \delta_{ij}$.