Framed motives

Иван Панин

11.12.2014

1

Теорема 1.1 (Морель)**.** Пусть k — поле (бесконечное, совершенное), $\operatorname{char} k \neq 2$. Тогда $\pi^s_{0,0}(S^0)(k) = \mathrm{GW}(k)$.

Нужно объяснить, что написано в двух частях равенства.

Пусть (V, φ) — квадратичное пространство над k, то есть задан изоморфизм $\varphi\colon V \to V^*$, совпадающий с $\varphi^*\colon V \to V^*$. Определим операцию $[V, \varphi] \oplus [V', \varphi'] = [V \oplus V', \varphi \oplus \varphi']$. Множество пар $[V, \varphi]$ образует коммутативную полугруппу.

Определение 1.2. $\mathrm{GW}(k)$ — группа Гротендика этой полугруппы.

Замечание 1.3. $\mathrm{GW}(k)$ является кольцом: $[V, \varphi] \otimes [V', \varphi'] = [V \otimes V', \varphi \otimes \varphi']$.

Пример 1.4. $\mathrm{GW}(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, $\mathrm{GW}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (размерность и сигнатура).

Поговорим про определение левой части. Положим

$$\pi^s_{0,0}(S^0)(k) = \pi^{\mathbb{A}^1}_{0,0}(\Sigma^\infty_{\mathbb{G}_m} \Sigma^\infty_{S^1}(S^0))(k).$$

Мы желаем определить пучки Нисневича групп $\pi^{\mathbb{A}^1}_{i,j}(\Sigma^\infty_{\mathbb{G}_m} \Sigma^\infty_{S^1}(X_+))$ для $X \in \mathrm{Sm}/k$. Рассмотрим категорию PreSp_{S^1} предпучков S^1_s-спектров на Sm/k. Напомним, что $S^1 = \Delta[1]/\partial(\Delta[1])$. Что такое S^1-спектр? Это последовательность $(X_0, X_1, \dots, X_n, \dots)$, где X_i — пунктированные схемы над k, вместе с морфизмами $\sigma_i\colon X_i \wedge S^1 \to X_{i+1}$.

Напомним, что предпучок множеств — это функтор $\mathrm{Sm}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Sets}_\bullet$.

Определение 1.5. Предпучок симплициальных множеств — это функтор $\mathrm{Sm}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{SSets}_\bullet$ или, эквивалентно, функтор $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{PreSets}_\bullet$.

Определение 1.6. Предпучок симплициальных спектров — это последовательность $(E_0, E_1, E_2, \dots)$, где E_i — предпучки симплициальных множеств, вместе с морфизмами $\sigma_i\colon E_i \wedge S^1 \to E_{i+1}$. Здесь S^1 — постоянный предпучок, значение которого на любом $U \in \mathrm{Sm}/k$ равно симплициальному множеству S^1.

Определение 1.7. Морфизм S^1-спектров $(X_0, X_1, \dots) \to (Y_0, Y_1, \dots)$ — это набор морфизмов $\varphi_i\colon X_i \to Y_i$, совместимых со связывающими отображениями:

$$\begin{tikzcd}
X_i \wedge S^1 \arrow[r] \arrow[d] & X_{i+1} \arrow[d] \\
Y_i \wedge S^1 \arrow[r] & Y_{i+1}
\end{tikzcd}$$

Аналогично определяется, что такое морфизм предпучков симплициальных спектров $(E_0, E_1, \dots) \to (F_0, F_1, \dots)$: это набор морфизмов симплициальных предпучков $\varphi_i\colon E_i \to F_i$ такой, что диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}
E_i \wedge S^1 \arrow[r] \arrow[d] & E_{i+1} \arrow[d] \\
F_i \wedge S^1 \arrow[r] & F_{i+1}
\end{tikzcd}$$

коммутативны. В частности, для любого $U \in \mathrm{Sm}/k$ есть коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_i(U)\wedge S^1 & \longrightarrow & E_{i+1}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_i(U)\wedge S^1 & \longrightarrow & F_{i+1}(U) \end{array}$$

Обозначим через $\mathrm{PreSp}_{S^1}(k)$ категорию предпучков симплициальных спектров.

Введем слабые эквивалентности: морфизм $\varphi\colon E \to F$ называется **слабой проективной эквивалентностью**, если для любого $U \in \mathrm{Sm}/k$ морфизм $\varphi_U\colon E(U) \to F(U)$ является слабой эквивалентностью S^1-спектров, то есть, для любого i морфизм $\pi_i(E(U)) \to \pi_i(F(U))$ является изоморфизмов.

Гомотопическая категория $\mathrm{Ho}(\mathrm{PreSp}_{S^1}(k)$ триангулирована. Функтор сдвига в ней переводит E в $S^1 \wedge E$: если $E = (E_0, E_1, \dots)$, то $S^1 \wedge E = (S^1 \wedge E_0, S^1 \wedge E_1, \dots)$.

Морфизм $\varphi\colon E \to F$ называется локальной эквивалентностью, если для любого $X \in \mathrm{Sm}/k$ и любой точки $x \in X$ морфизм $\varphi_x\colon E_x \to F_x$ является слабой эквивалентностью S^1-спектров. Здесь $E_x = E(U_x^h)$, $F_x = F(U_x^h)$, где U_x^h — это гензелизация X в точке x («пополнение» X в $\mathfrak{m}_x$). То есть, $E(U_x^h) = \varinjlim E(V)$, где предел берется по всем окрестностям Нисневича V точки x. Таким образом, для локальной эквивалентности морфизмы $\pi_i(E_x) \to \pi_i(F_x)$ являются изоморфизмами.

Альтернативное определение: если задан $E \in \mathrm{PreSp}_{S^1}(k)$, то для каждого i задан предпучок абелевых групп $\pi_i(E)\colon U \mapsto \pi_i(E(U))$; если задан морфизм $\varphi\colon E \to F$ ($E, F \in \mathrm{PreSp}_{S^1}(k)$), то задан морфизм $\pi_i(\varphi)\colon \pi_i(E) \to \pi_i(F)$. Говорим, что φ — локальная эквивалентность, если $\pi_i(\varphi)\colon \pi_i(E) \to \pi_i(F)$ — изоморфизм на ростках. Это эквивалентно тому, что $\widetilde{\pi_i(\varphi)}_{\mathrm{Nis}}\colon \widetilde{\pi_i(E)}_{\mathrm{Nis}} \to \widetilde{\pi_i(F)}_{\mathrm{Nis}}$ — изоморфизм.

Локализация по локальным эквивалентностям обозначается через $\mathrm{Ho}^{\mathrm{loc}}(\mathrm{PreSp}_{S^1}(k))$. Обозначение покороче: $\mathrm{Ho}^{\mathrm{loc}}(\mathrm{Sp}_{S^1}(k))$.

Если $X \in \mathrm{Sm}/k$, то в $\mathrm{PreSp}_{S^1}(k)$ есть объект (называемый **надстроечным спектром**) $\Sigma^\infty_{S^1}(X_+) = (X_+, X_+ \wedge S^1, X_+ \wedge S^1 \wedge S^1, \dots)$ со связывающими морфизмами $\mathrm{id}\colon (X_+ \wedge S^1) \wedge S^1 \to X_+ \wedge S^1 \wedge S^1$. Здесь X_+ — это симплициальный предпучок, постоянный в симплициальном направлении: каждому $[n] \in \Delta^{\mathrm{op}}$ сопоставляется предпучок X_+. Этот предпучок устроен так: $U \mapsto \mathrm{Mor}(U, X) = \mathrm{Mor}(U, X \coprod \mathrm{Spec}(k))$.

Пусть $p_X : X \times \mathbb{A}^1 \to X$ — каноническая проекция. Имеется выделенный треугольник $\Sigma^\infty_{S^1}((X \times \mathbb{A}^1)_+) \to \Sigma^\infty_{S^1}(X_+) \to \mathrm{Cone}(p_X)$. Рассмотрим наименьшую триангулированную подкатегорию $\mathcal{B}$ в $\mathrm{Ho}^{\mathrm{loc}}(\mathrm{Sp}_{S^1}(k))$, содержащую все объекты вида $\mathrm{Cone}(p_X)$ и замкнутую относительно прямых сумм.

Определение 1.8. $\mathrm{Ho}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sp}_{S^1}(k))$ — это локализация категории $\mathrm{Ho}^{\mathrm{loc}}(\mathrm{Sp}_{S^1}(k))$ по $\mathcal{B}$.

Замечание 1.9. Поэтому $\Sigma^\infty_{S^1}((X \times \mathbb{A}^1)_+) \to \Sigma^\infty_U(X_+)$ — изоморфизм.

Замечание 1.10. Подкатегория $\mathcal{B}$ порождается (в том же смысле) объектами вида $\mathrm{Cone}(i_X)$, где $ß_X : \Sigma^\infty_{S^1}(X_+) \to \Sigma^\infty((X \times \mathbb{A}^1)_+)$ получен из морфизма $i_X : X \to X \times \mathbb{A}^1$, $x \mapsto (x, 0)$.

$\mathrm{Ho}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sp}_{S^1}(k))$ — мотивная гомотопическая категория S^1-спектров.

Замечание 1.11. Для любого $E \in \mathrm{PreSp}_{S^1}(k)$ и для любого i можно рассмотреть предпучок

$$i\colon U \mapsto \pi_i^{\mathbb{A}^1}(E)(U) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sp}_{S^1}(k))}(\Sigma^\infty_{S^1}(U_+) \wedge S^i, E)$$

Целью было определить $\pi_{i,j}^{\mathbb{A}^1}(E)$.

Мы обсуждали мотивную стабильную гомотопическую категорию $\mathrm{SH}(k)$ Воеводского–Мореля. Один из вариантов ее построения использует биспектры ($(\mathbb{G}_m, S^1)$-спектры).

Определение 1.12. $\mathbb{G}_m = (\mathbb{A}^1 - 0, \{1\})$ (то есть, $\mathbb{A}^1 - 0$ с отмеченной точкой 1).

Определение 1.13. $\mathbb{G}_m$-спектр в категории $\mathrm{PreSp}_{S^1}(k)$-спектров — это последовательность $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots)$ с морфизмами $\mathbb{G}_m \wedge \mathcal{E}_j \to \mathcal{E}_{j+1}$. Заметим, что $\mathbb{G}_m \wedge \mathcal{E}$ — это снова S^1-спектр: $(\mathbb{G}_m \wedge E_0, \mathbb{G}_m \wedge E_1, \dots$.

Обозначим для краткости $\mathrm{SH}^{\mathbb{A}^1}_{S^1}(k) = \mathrm{Ho}^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sp}_{S^1}(k))$.

Пусть $\mathcal{E}_* = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots)$ — биспектр (то есть, $\mathbb{G}_m$ спектр в категории S^1-спектров предпучков). Для $U \in \mathrm{Sm}$ и числа j рассмотрим морфизм

$$\begin{array}{c} \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}^{\mathbb{A}^1}_{S^1}(k)}(\Sigma^\infty_{S^1}(\mathbb{G}_m^{\wedge(j+k)} \wedge (U_+)), \mathcal{E}_k) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \wedge\mathbb{G}_m} \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}^{\mathbb{A}^1}_{S^1}(k)}(\Sigma^\infty_{S^1}(\mathbb{G}_m \wedge (\mathbb{G}_m^{\wedge(j+k)} \wedge (U_+))), \mathbb{G}_m \wedge \mathcal{E}_k) \\ \Big\downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}^{\mathbb{A}^1}_{S^1}(k)}(\Sigma^\infty_{S^1}(\mathbb{G}_m^{\wedge(1+j+k)} \wedge (U_+)), \mathcal{E}_{k+1}) \end{array}$$

Положим теперь

$$\pi^{\mathbb{A}^1}_{0,j}(\mathcal{E}_*)(U) = \varinjlim_{\tau} \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}^{\mathbb{A}^1}_{S^1}(k)}(\Sigma^\infty_{S^1}(\mathbb{G}_m^{\wedge(k+j)} \wedge (U_+)), \mathcal{E}_k).$$

Аналогично, определим

$$\pi^{\mathbb{A}^1}_{i,j}(\mathcal{E}_*)(U) = \varinjlim_{\tau} \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}^{\mathbb{A}^1}_{S^1}(k)}(\Sigma^\infty_{S^1}(\mathbb{G}_m^{\wedge(k+j)} \wedge (U_+)), \mathcal{E}_k[-i]).$$

Определение 1.14. Пусть $\varphi\colon \mathcal{E}'_* \to \mathcal{E}''_*$ — морфизм биспектров. Говорят, что φ — **мотивная эквивалентность**, если для всех $i, j \in \mathbb{Z}$ морфизм $\pi^{\mathbb{A}^1}_{i,j}(\varphi)\colon \pi^{\mathbb{A}^1}_{i,j}(\mathcal{E}'_*)_x \to \pi^{\mathbb{A}^1}_{i,j}(\mathcal{E}''_*)_x$ является изоморфизмом для любого $X \in \mathrm{Sm}/k$ и для любой точки $x \in X$.

Определение 1.15. **Мотивная категория биспектров** $\mathrm{SH}_{\mathbb{G}_m,S^1}(k)$ — это категория биспектров, локализованная по мотивным эквивалентностям.

Определение 1.16. $\pi_{i,j}(\mathcal{E}_*)(U) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}^{\mathrm{proj}}_{S^1}(k)}(\Sigma^\infty_{S^1}(\mathbb{G}_m^{(k+j)}) \wedge (U_+), \mathcal{E}_k[-i])$.

$\varphi\colon \mathcal{E}'_* \to \mathcal{E}''_*$ называется **проективной эквивалентностью**, если для любого U морфизм $\pi_{i,j}(\mathcal{E}_*)(U) \to \pi_{i,j}(\mathcal{E}''_*)(U)$ является изоморфизмом.

Определение 1.17. $\mathrm{Ho}^{\mathrm{proj}}(\mathrm{Sp}_{\mathbb{G}_m,S^1})$ — это гомотопическая категория категории биспектров, локализованная по проективным эквивалентностям.

Предложение 1.18. Категория $\mathrm{Ho}^{\mathrm{proj}}(\mathrm{Sp}_{\mathbb{G}_m,S^1})$ является триангулированной. Сдвиги в ней — это $S^1 \wedge -$.

Цель: определить объект $M_{\mathrm{fr}}(X)$ (**frame-мотив** X) в $\mathrm{PreSp}(k)$ для $X \in \mathrm{Sm}/k$. Положим

$$M_{\mathrm{fr}}(X)(U) = (\mathrm{Fr}(\Delta^\bullet \times U, X), \mathrm{Fr}(\Delta^\bullet \times U, X \otimes S^1), \mathrm{Fr}(\Delta^\bullet \times U, X \otimes S^1 \otimes S^1), \dots).$$

Теорема 1.19. Это $\Omega_{\mathbb{G}_m,S^1}$-биспектр.

Небольшой обман: $\pi_{0,0}(\Sigma^\infty_{\mathbb{G}_m}\Sigma^\infty_{S^1}(S^0)) = \pi_0(\mathrm{Fr}(\Delta^\bullet_k, \mathrm{Spec}(k)))^+ = \mathrm{GW}(k)$ (последнее равенство доказал Нешитов). Нуль-симплексы этого пространства — это множество $\mathrm{Fr}(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Spec}(k))$.