Теорема сокращения для линейных frame-мотивов

Иван Панин

18.02.2016

1

Доклад основан на работе Ананьевского–Гаркуши–Панина (http://arxiv.org/abs/1601.06642).

Теорема 1.1. Пусть k — бесконечное совершенное поле, $X, Y \in \mathrm{Sm}/k$. Тогда морфизм комплексов абелевых групп

$$\mathbb{Z}F(\Delta^\bullet \times X, Y) \xrightarrow{-\boxtimes(\mathrm{id}_{\mathbb{G}_m} - e)} \mathbb{Z}F((\Delta^\bullet) \times X) \wedge (\mathbb{G}_m, 1), Y \wedge (\mathbb{G}_m, 1)).$$

является квази-изоморфизмом.

Имеется внешнее спаривание $\mathrm{Fr}_n(X,Y) \times \mathrm{Fr}_m(S,T) \xrightarrow{\boxtimes} \mathrm{Fr}_{n+m}(X \times S, Y \times T)$: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, f, Z, U, \varphi_1, \ldots, \varphi_n; g) \boxtimes (\beta_1, \ldots, \beta_m, f', Z', U', \psi_1, \ldots, \psi_m; g') = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m, f \times f', Z \times Z', U \times U', \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m, g \times g')$.

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[r] \arrow[dl, "{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,f)}"'] & \mathbb{A}^n \times Y \\
\mathbb{A}^n \times X \arrow[dr] & Z \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \times Y \arrow[u, hook] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Напомним, что есть соответствие $\Sigma = (t, c, \{0\}, t, c) \in \mathrm{Fr}_1(\mathrm{pt}, \mathrm{pt})$, устроенное следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{A}^1 \arrow[r, "{(t,c)}"] \arrow[dl] & \mathbb{A}^1 \times \mathrm{pt} \\
\mathbb{A}^1 \times \mathrm{pt} & \{0\} \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook, "{(t,c)}"] \arrow[d] & 0 \times \mathrm{pt} \arrow[u, hook] \\
 & \mathrm{pt} &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Fr}(-, Y) = \varinjlim(\mathrm{Fr}_0(-, Y) \xrightarrow{\boxtimes\Sigma} \mathrm{Fr}(-, Y) \to \ldots)$ Спаривание продолжается естественным образом до спариваний

$$\mathrm{Fr}_n(X, Y) \times \mathrm{Fr}(S, T) \to \mathrm{Fr}(X \times S, Y \times T)$$

и

$$\mathrm{Fr}(X, Y) \times \mathrm{Fr}_0(S, T) \to \mathrm{Fr}(X \times S, Y \times T).$$

Обозначим $\mathbb{Z}F_n(X, Y) = \mathbb{Z}[\mathrm{Fr}_n(X, Y)]/((Z_1 \coprod Z_2) - (Z_1) - (Z_2))$. Получаем категорию $\mathbb{Z}F_*(k)$, в которой $\mathbb{Z}F_*(X, Y) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}F_n(X, Y)$. Можно считать, что $\Sigma = 1 \cdot \Sigma \in \mathbb{Z}F_1(\mathrm{pt}, \mathrm{pt})$ Наконец, $\mathbb{Z}F(X, Y) = \varinjlim(\mathbb{Z}F_0(X, Y) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}F_1(X, Y) \xrightarrow{\Sigma} \ldots$. При этом $\mathbb{Z}F(-, Y)$ — $\mathbb{Z}F_*(k)$-предпучок.

Определение 1.2. $X, Y \in \mathrm{Sm}/k$, (S,s), (S',s') — пунктированные многообразия ($s \in S(k)$, $s' \in S'(k)$). Обозначим через e_s композицию $S \to \mathrm{pt} \xrightarrow{s} S$. Рассмотрим подгруппу $\mathbb{Z}F(X \wedge (S,s), Y \wedge (S,s))$ в $\mathbb{Z}F(X \times S, Y \times s)$, состоящую из a таких, что $a \circ (\mathrm{id}_X \times e_s) = (\mathrm{id}_Y \times e_s) \circ a = 0$. Иными словами, $a \circ (\mathrm{id}_x \boxtimes (\mathrm{id}_S - e_s)) = a = (\mathrm{id}_Y \boxtimes (\mathrm{id}_S - e_s)) \circ a$.

Определим $\mathbb{Z}F(X \wedge (S,s) \wedge (S',s'), Y \wedge (S,s) \wedge (S',s'))$ как подгруппу в $\mathbb{Z}F(X \times S \times S', Y \times S \times S')$, состоящую из морфизмов a таких, что $a \circ (\mathrm{id}_X \boxtimes (\mathrm{id}_S - e_s) \boxtimes (\mathrm{id}_{S'} - e_{s'})) = a = (\mathrm{id}_Y \boxtimes (\mathrm{id}_S - e_s) \boxtimes (\mathrm{id}_{S'} - e_{s'})) \circ a$.

Определение 1.3. Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ — предпучки множеств на Sm/k, и $\varphi_0, \varphi_1 \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — морфизмы между ними. Тогда $\mathbb{A}^1$**-гомотопией** между φ_0 и φ_1 называется морфизм предпучков $\mathcal{F} \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{A}^1, G)$ такой, что $i_0^* \circ H = \varphi_0$ и $i_1^* \circ H = \varphi_1$.

Лемма 1.4. Пусть φ_0, φ_1 $\mathbb{A}^1$-гомотопны с помощью гомотопии H. Тогда морфизмы предпучков симплициальных множеств $\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^\bullet, \varphi_0), \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^\bullet, \varphi_1) \colon \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^\bullet, \mathcal{F}) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^\bullet, \mathcal{G})$ симплициально гомотопны.

Замечание 1.5. Лемму 1.4 можно применить к предпучкам абелевых групп.

Замечание 1.6. Иными словами, морфизмы $\mathcal{F}(\Delta^\bullet \times X) \to \mathcal{G}(\Delta^\bullet \times X)$, полученные из φ_0 и φ_1, симплициально гомотопны, и эта гомотопия функториальна по X.

Очень грубая схема доказательства теоремы 1.1. У нас есть предпучки $\mathbb{Z}F(Y)$ и $\underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{G}_m, 1), \mathbb{Z}F(Y \wedge (\mathbb{G}_m, 1)))$. Предположим, что мы построили морфизмы

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}F(Y) \arrow[r, bend left, "- \boxtimes (\mathrm{id} - e)"] & \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{G}_m, 1), \mathbb{Z}F(Y \wedge (\mathbb{G}_m, 1))) \arrow[l, bend left, "\rho"] \end{tikzcd}$$

такие, что есть $\mathbb{A}^1$-гомотопии

1. $$\rho \circ (- \boxtimes (\mathrm{id} - e)) \sim_{\mathbb{A}^1} \mathrm{id}_{\mathbb{Z}F(Y)};$$

2. $$(- \boxtimes (\mathrm{id} - e)) \circ \rho \sim_{\mathbb{A}^1} \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{G}_m, 1), \mathbb{Z}F(Y \wedge (\mathbb{G}_m, 1)))}.$$

Тогда теорема доказывается применением леммы 1.4. Действительно, получаем морфизмы симплициальных абелевых групп

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}F(\Delta^\bullet \times X, Y) \arrow[r, bend left, "- \boxtimes (\mathrm{id} - e)"] & \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{G}_m, 1), \mathbb{Z}F(Y \wedge (\mathbb{G}_m, 1)))(X \times \Delta^\bullet) \arrow[l, bend left, "\rho"] \arrow[r, equal] & \mathbb{Z}F((\Delta^\bullet \times X) \wedge (\mathbb{G}_m, 1), Y \wedge (\mathbb{G}_m, 1)) \end{tikzcd}$$

По лемме 1.4 композиции наивно гомотопны тождественным морфизмам.

На самом деле, такое ρ построить не удается, но удается построить исчерпывающую фильтрацию правой части предпучками и задать на членах фильтрации морфизмы $\rho^{(N)}$, которые будут квази-изоморфизмами (?!). □

У нас было спаривание $\boxtimes \colon \mathbb{Z}F_n \times \mathbb{Z}F \to \mathbb{Z}F$. Тогда есть спаривание

$$\mathbb{Z}F_n(X,Y) \times \mathbb{Z}F(\mathrm{pt}, \mathrm{pt}) \to \mathbb{Z}F(X \times \mathrm{pt}, Y \times \mathrm{pt}) = \mathbb{Z}F(X,Y),$$

и, стало быть,

$$\mathbb{Z}F_n(-,Y) \times \mathbb{Z}F(\mathrm{pt},\mathrm{pt}) \to \mathbb{Z}F(X \times \mathrm{pt}, Y \times \mathrm{pt}) = \mathbb{Z}F(-,Y),$$

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}F(\mathrm{pt},\mathrm{pt})$. Получаем морфизмы $-\boxtimes a, -\boxtimes b\colon \mathbb{Z}F_n(-,Y) \to \mathbb{Z}F(-,Y)$. Пусть a, b $\mathbb{A}^1$-гомотопны (то есть, существует $h \in \mathbb{Z}F(\mathbb{A}^1,\mathrm{pt})$ такое, что $h_0 = a$ и $h_1 = b$). Тогда можно рассмотреть морфизм

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}F(-,Y) \\
\mathbb{Z}F_n(-,Y) \arrow[r, "-\boxtimes h"] \arrow[urr, bend left, "-\boxtimes a"] \arrow[drr, bend right, "-\boxtimes b"'] & \mathbb{Z}F(-\times\mathbb{A}^1,Y) \arrow[ur, "i_0^*"'] \arrow[dr, "i_1^*"] & \\
 & & \mathbb{Z}F(-,Y)
\end{tikzcd}$$

Что такое $\mathbb{Z}F_1(\mathrm{pt},\mathrm{pt})$? $\mathrm{Fr}_1(\mathrm{pt},\mathrm{pt})$ — это тройка $(z, U \subseteq \mathbb{A}^1, \varphi)$, где $U \subseteq \mathbb{A}^1$ — открытое подмножество, $z \in U$, и φ — функция на U такая, что прообраз $\varphi^{-1}(0)$ — это в точности точка z. Поэтому элемент $\mathbb{Z}F_1(\mathrm{pt},\mathrm{pt})$ — это сумма вида $\sum_i (z_i, U_i, \varphi_i)$.

Есть важная $\mathbb{A}^1$-гомотопия

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}F(-\times X\wedge(\mathbb{G}_m,1)\wedge(\mathbb{G}_m,1), Y\wedge(\mathbb{G}_m,1)\wedge(\mathbb{G}_m \\
\mathbb{Z}F(-\times X\wedge(\mathbb{G}_m,1)\wedge(\mathbb{G}_m,1), Y\wedge(\mathbb{G}_m,1)\wedge(\mathbb{G}_m,1)) \arrow[r, "H_{X,Y}"] \arrow[ur, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, bend right, "\mathrm{sw}"'] & \mathbb{Z}F(-\times X\wedge(\mathbb{G}_m,1)\wedge(\mathbb{G}_m,1)\times\mathbb{A}^1, Y) \arrow[u, shift right, "i_0^*"] \arrow[u, shift left, "i_1^*"']
\end{tikzcd}$$

Что такое sw? Пусть $a \in \mathbb{Z}F(W \times X \wedge (\mathbb{G}_m,1) \wedge (\mathbb{G}_m,1), Y \wedge (\mathbb{G}_m,1) \wedge (\mathbb{G}_m,1))$. Тогда $\mathrm{sw}(a) = (\mathrm{id}_Y \times \tau) \circ a \circ (\mathrm{id}_{W\times X} \times \tau)$, где τ меняет порядок двух сомножителей $(\mathbb{G}_m,1)$.

Как строить ρ — это отдельный разговор. Откуда берется первое свойство для ρ?

Лемма 1.7. $\rho \circ (-\boxtimes (\mathrm{id} - e)) = -\boxtimes a_0$, причем $a_0 \in \mathbb{Z}F(\mathrm{pt},\mathrm{pt})$ и a_0 гомотопен элементу $\mathrm{id} \in \mathrm{Map}_{\mathrm{Sm}}(\mathrm{pt},\mathrm{pt}) \subseteq \mathbb{Z}F_0(\mathrm{pt},\mathrm{pt}) \subseteq \mathbb{Z}F(\mathrm{pt},\mathrm{pt})$ посредством некоторой гомотопии h. Отсюда следует, что $\rho \circ (-\boxtimes (\mathrm{id} - e))$ гомотопно тождественному отображению посредством гомотопии $-\boxtimes h$.

Теперь про второе свойство.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}F(W\times X\wedge\mathbb{G}_m, Y\wedge\mathbb{G}_m) \arrow[d, "-\boxtimes(\mathrm{id}-e)"] & \mathbb{Z}F(W\times X\wedge\mathbb{G}_m\wedge\mathbb{G}_m, Y\wedge\mathbb{G} \\
\mathbb{Z}F(W\times X\wedge\mathbb{G}_m\wedge\mathbb{G}_m, Y\wedge\mathbb{G}_m\wedge\mathbb{G}_m) \arrow[r, "H"] \arrow[ur, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, bend right, "\mathrm{sw}"'] & \mathbb{Z}F(W\times X\wedge\mathbb{G}_m\wedge\mathbb{G}_m\times\mathbb{A}^1, Y\wedge \arrow[u, shift right, "i_0^*"] \arrow[u, shift left, "i_1^*"']
\end{tikzcd}$$

Заметим, что $\rho \circ H \circ (-\boxtimes (\mathrm{id} - e))$ является $\mathbb{A}^1$-гомотопией между $\rho \circ (-\boxtimes (\mathrm{id} - e))$ и $\rho \circ \mathrm{sw} \circ (-\boxtimes (\mathrm{id} - e))$

Мы желаем доказать, что $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}F(-\times X\wedge\mathbb{G}_m, Y\wedge\mathbb{G}_m)}$ $\mathbb{A}^1$-гомотопен $(-\boxtimes (\mathrm{id} - e)) \circ \rho$.

Применим первое свойство; получим, что морфизм $\rho \circ (- \boxtimes (\mathrm{id} - e))$ $\mathbb{A}^1$-гомотопен тождественному.

Возьмем $a \in \mathbb{Z}F(- \times X \wedge \mathbb{G}_m, Y \wedge \mathbb{G}_m)$ и рассмотрим морфизм $a \boxtimes (\mathrm{id} - e)\colon X \wedge \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m \to Y \wedge \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m$.

$$\begin{tikzcd}
X \wedge \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m \arrow[r, "a\boxtimes(\mathrm{id}-e)"] & (Y \wedge \mathbb{G}_m) \wedge \mathbb{G}_m \\
X \wedge \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m \arrow[u, "\mathrm{id}_X \wedge \tau"] \arrow[r, "\mathrm{sw}(a\boxtimes(\mathrm{id}-e))"] & (Y \wedge \mathbb{G}_m) \wedge \mathbb{G}_m \arrow[u, "\mathrm{id}_Y \wedge \tau"']
\end{tikzcd}$$

Применяя ρ к нижней стрелочке (сокращая первые $\mathbb{G}_m$), получим морфизм $X \wedge \mathbb{G}_m \to Y \wedge \mathbb{G}_m$.

Нетрудно понять, что этот морфизм равен $\rho(a) \boxtimes (\mathrm{id} - e)$, тогда $((- \boxtimes (\mathrm{id} - e)) \circ \rho) = \rho \circ \mathrm{sw} \circ (- \boxtimes (\mathrm{id} - e))$, и все доказано.

Давайте возьмем $X = Y = \mathrm{pt}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}F(-, \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m) \\
\mathbb{Z}F(-, \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m) \arrow[r, "H"] \arrow[urr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[drr, bend right, "\tau"'] & \mathbb{Z}F(- \times \mathbb{A}^1, \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m) \arrow[ur, "i_0^*"'] \arrow[dr, "i_1^*"] & \\
 & & \mathbb{Z}F(-, \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m)
\end{tikzcd}$$

Говоря неформально, у нас есть отображения $\mathrm{id}, \tau\colon \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m$, и мы должны написать гомотопию между ними как между предпучками с трансферами (так больше шансов, поскольку больше морфизмов). Для этого можно отступить в общую точку $\operatorname{Spec} K$, где $K = k(t_1, t_2)$; после композиции с id и τ получим морфизмы (t_1, t_2) и (t_2, t_1). Содержательная теорема инъективности утверждает, что достаточно проверить для общей точки. Иными словами, мы смотрим на $(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m)_K$, где есть две точки с носителями (x, y) и (y, x). После этого пишется гомотопия степени 2 такая, что над 1 висят эти две точки, а над 0 висят две точки $(xy, 1)$ и $(1, xy)$; получим равенство $(x, y) + (y, x) = (xy, 1) + (1, xy)$. Применяя проектор в $\mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m$, у нас получится равенство вида $xy = -yx$ (так что выше был обман — где-то результат должен быть гомотопен $-\mathrm{id}$, а не id).