Квадратичные формы над локальными кольцами

Андрей Лавренов

10.03.2016

Доклад основан на работе Stefan Gille, ‘On quadratic forms over semilocal rings’.

1

Теорема 1.1. Пусть R — полулокальное кольцо, содержащее бесконечное поле F характеристики, отличной от 2. Тогда

$$\underline{I}_n(R) \xrightarrow{\sim} I^n(R).$$

Обозначения: R — коммутативное полулокальное кольцо, 2 обратима в R, $q\colon R^n \to R$ — невырожденная квадратичная форма на свободном модуле ранга n.

Любая такая форма диагонализируема: $q \cong \langle a_1, \dots, a_n\rangle$, где $a_i \in R^*$. Верна теорема Витта о сокращении: из $q \perp q_1 \cong q \perp q_2$ следует, что $q_1 \cong q_2$.

Форма называется **изотропной**, если существует унимодулярный вектор v такой, что $q(v) = 0$. Говорят, что v — **анизотропный** вектор, если $q(v) \in R^*$. Отображение $b(v, -)\colon R^n \to R$ обладает сечением $r \mapsto vq(v)^{-1}r$, и vR — прямое слагаемое R^n. Тогда $q \cong \langle q|_V\rangle \perp q'$.

Лемма 1.2. Пусть все поля вычетов кольца R имеют ≥ 7 элементов, q, q' — квадратичные формы, (x, y) — унимодулярный вектор из $V_q \oplus V_{q'}$, $c = q(x) + q'(y)$. Тогда существует унимодулярный вектор (v, w) такой, что $c = q(v) + q'(w)$ и $q(v), q'(w) \in R^*$.

> *Доказательство.* Рассмотрим отражение $\tau_v\colon V \to V$ относительно v: $w \mapsto w - 2\frac{b_q(v,w)}{q(v)}v$. Мы будем искать ответ в виде $(v, w) = \tau_{r,s}(x, y)$.
>
> Редукция к случаю поля. Если для поля мы можем по $(\overline{x}, \overline{y})$ найти $(\overline{r}, \overline{s})$, то можно поднять его до (r, s) по китайской теореме об остатках и найти $(v, w) = \tau_{r,s}(x, y)$.

2. Для поля — перебор случаев.

$\square$

Определение 1.3. $\mathrm{GW}(R)$ — группа Гротендика множества классов изометрий квадратичных форм над R. Есть отображение ранга $\mathrm{GW}(R) \to \mathbb{Z}$ и каноническая сюръекция $GW(R) \to W(R)$ (где $W(R)$ — фактор по идеалу, порожденному гиперболической плоскостью $\mathbb{H} = \langle 1, -1\rangle$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GW}(R) \arrow[r, "\mathrm{rk}"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\
W(R) \arrow[r] & \mathbb{Z}/2
\end{tikzcd}$$

Это декартов квадрат, и потому у горизонтальных стрелок одинаковые ядра: это фундаментальный идеал $I(R)$. Он порожден элементами вида $\langle 1\rangle - \langle a\rangle$ в $\mathrm{GW}(R)$, и элементами вида $\langle 1, -a\rangle = \langle\langle a\rangle\rangle$ (1-формами Пфистера) в $W(R)$. Как всегда, обозначим $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle = \langle\langle a_1\rangle\rangle \otimes \dots \otimes \langle\langle a_n\rangle\rangle$.

Замечание 1.4. Если форма Пфистера φ изотропна, то она гиперболична. Условие $\langle a\rangle \otimes \varphi \cong \varphi$ равносильно тому, что $a \in D(\varphi)^* = D(\varphi) \cap R^*$.

Говорят, что $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$ элементарно эквивалентны, если существуют $i < j$ такие, что $\langle\langle a_i, a_j\rangle\rangle \cong \langle\langle b_i, b_j\rangle\rangle$ и $a_k = b_k$ при $k \neq i, j$. P-эквивалентность — транзитивное замыкание элементарной эквивалентности. Формы Пфистера изоморфны тогда и только тогда, когда они элементарно эквивалентны.

Для обычных форм вида $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ тоже можно определить цепочную эквивалентность, которая порождает GW-эквивалентность. Если во всех полях вычетов хотя бы 5 элементов, то снова изоморфность равносильна цепочной эквивалентности.

Следствие 1.5. $\mathrm{GW}(R) \cong \mathbb{Z}[R^*]/\{[ab^2] - [a], [a] + [b] - ([c] + [d] \mid \langle a, b\rangle \cong \langle c, d\rangle\}$

Следствие 1.6. Обозначим соотношения

$$(Q)\colon [ab^2] - [a],$$
$$(W)\colon [a] + [b] - ([a+b] + [ab(a+b)]), (H)\colon \qquad [1] + [-1]$$

$\mathrm{GW}(R) \cong \mathbb{Z}[R^*]/\{(Q), (W)\}$. $W(R) \cong \mathbb{Z}[R^*]/(Q), (W), (H)$

Доказательство. Пусть $\langle a, b\rangle \cong \langle c, d\rangle$, тогда $c \in D(\langle a, b\rangle)^*$. По лемме 1.2 найдутся $s, t \in R^*$ такие, что $c = as^2 + bt^2$. При этом $ab = cd \cdot e^2$. Тогда $[a] + [b] = [as^2] + [bt^2] = [as^2 + bt^2] + [abs^2t^2(as^2 + bt^2)] = [c] + [abc] = [c] + [c^2de^2] = [d]$ □

Следствие 1.7. Рассмотрим отображение $\mathbb{Z}[R^*] \to \mathrm{GW}(R)$. При этом изоморфизме $I(R) \cong \mathbb{Z}[R^* \setminus \{1\}]/(Q), (W)$.

Доказательство. Прообразом идеала $I(R)$ является идеал, порожденный $[1] - [a]$. □

Определим группу $\underline{I_n}(R)$. Рассмотрим свободную абелеву группу $\mathrm{Pf}_n(R)$ с образующими $[\varphi] = [a_1, \dots, a_n]$, где $\varphi = \langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$ — форма Пфистера. Тогда $\underline{I_n}(R) = \mathrm{Pf}_n(R)/(1), (2), (3)$, где

1. $[1, \dots, 1]$,
2. $[a, c_2, \dots, c_n] + [b, c_2, \dots, c_n] - ([a+b, c_2, \dots, c_n] + [ab(a+b), c_2, \dots, c_n]$,
3. $[a, b, d_3, \dots, d_n] + [ab, c, d_2, \dots, d_n] - ([a, b, d_3, \dots, d_n] + [ab, c, d_3, \dots, d_n])$

Определение 1.8. Обозначим через $f_n^R\colon \underline{I_n}(R) \to I^n(R)$ естественную проекцию.

Теорема 1.9. Естественное отображение $f_2^R\colon \underline{I_2}(R) \to I^n(R)$ является изоморфизмом, если все поля вычетов R имеют хотя бы 7 элементов.

Доказательство. Положим $T(R) = \underline{I_2}(R) \times R^*/(R^*)^2$. Определим сложение на $T(R)$: $(x, \overline{r}) + (y, \overline{s}) = (x + y + [r, s], \overline{r} \cdot \overline{s})$. При этом $(0, \overline{1})$ является нулем, и $-(x, \overline{r}) = (-x - [r, r^{-1}], \overline{r}^{-1})$. Заметим, что $\underline{I_2}(R) \times \{\overline{1}\} \subseteq T(R)$. Определим отображение $\alpha\colon \underline{I_1}(R) \to T(R)$, $[a] \mapsto (0, \overline{a})$. Нетрудно проверить, что это отображение определено корректно.

Рассмотрим ограничение $\alpha|_{I^2}(R)$. В кольце Витта выполнено соотношение $\langle\langle a, b\rangle\rangle = \langle\langle a\rangle\rangle + \langle\langle b\rangle\rangle - \langle\langle ab\rangle\rangle$. Отображение α переводит это в $([a, b], \overline{ab}) - (0, \overline{ab}) = ([a, b], 1)$. Мы получили отображение, обратное к f_2^R. □

Построим $\xi_{n+1}\colon \underline{I_{n+1}}(R) \to \underline{I_n}(R)$ при $n \geq 2$: $[a_1, \dots, a_n] \mapsto [a_1, a_3, \dots, a_n] + [a_2, a_3, \dots] - [a_1a_2, a_3, \dots, a_n]$. Нетрудно проверить, что это корректно определено.

Теорема 1.10 (Панин–Пименов)**.** Пусть R — регулярная полулокальная область целостности, содержащая поле характеристики не 2, с бесконечными полями вычетов, K — поле частных R, q — квадратичная форма. Тогда изотропность q равносильно изотропности q_K.

Лемма 1.11. 1. Если $(\varphi \perp -\psi)_K$ изотропна, то существует $a \in D(\varphi)^* \cap D(\chi)^*$.

2. $D(q)^* = D(q_K) \cap R^*$.

Доказательство. 1. Существует вектор (v, w) такой, что $0 = \varphi(v) - \psi(w)$ (по лемме 1.2).

2. $(q \perp \langle -c \rangle|_K$ изотропна, и потому $q(u) = cr^2$.

$\square$

Следствие 1.12. Если φ, ψ — формы над R такие, что $\varphi_K \cong \psi_K$, то $\varphi \cong \psi$

Доказательство. Пусть $\psi = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$, $b_1 \in D(\varphi_K) \cap R^* = D(\varphi)^*$. Тогда $\varphi \cong \langle b_1 \rangle \perp \varphi_1$, где $(\varphi_1)_K \cong \langle b_2, \dots, b_n \rangle$. Далее — индукция. $\square$

Следствие 1.13. Пусть q, ψ — формы над R. Предположим, что $q_K \cong \psi_K \perp \varphi$ над K. Тогда найдется форма φ' над R такая, что $q \cong \psi \perp \varphi'$ и $\varphi'_K \cong \varphi$.

Доказательство. Пусть $\psi \cong \langle a \rangle \perp \psi_1$, где $a \in R^*$. Тогда $a \in D(q_K)$, и потому $a \in D(q)$. Значит, $q \cong \langle a \rangle \perp q_1$. Поэтому $(q_1)_K \cong (\psi_1)_K \perp \varphi$. $\square$

Далее везде пусть R — полулокальная локализация гладкой F-алгебры (где F — бесконечное поле вычетов характеристики не 2).

Теорема 1.14 (Kerz)**.** Обозначим $T_{\mathbb{Z}}(R^*)/(a \otimes (1-a)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n^M(R)$, $k_n^M(R) = K_n^M(R)/2$. Отображение $e_n \colon k_n^M(R) \to I^n(R)/I^{n+1}(R)$ является изоморфизмом.

Лемма 1.15. Пусть φ, q — формы Пфистера над R, $q_K \cong \varphi_K \otimes \psi$, где ψ — форма над K. Тогда $q \cong \varphi \otimes \psi'$, где ψ' — форма Пфистера над R.

Теорема 1.16 (Arason–Elman)**.** Пусть K — поле конечной степени трансцендентности над простым подполем. Тогда существует число $\mathrm{st}(K)$ такое, что

1. $I^n(K)$ без кручения для любого $n \geq \mathrm{st}(K)$.
2. Для любой n-формы Пфистера φ существует $(n-1)$-форма Пфистера ψ такая, что $\varphi \cong \langle\langle -1 \rangle\rangle \otimes \psi$.

По теореме 1.10 $W(R) \to W(K)$ — инъекция. Поэтому $I^n(R)$ без кручения, и для любой n-формы Пфистера φ существует $(n-1)$-форма Пфистера ψ такая, что $\varphi \cong \langle\langle -1 \rangle\rangle \otimes \psi$.

Определение 1.17. $\mathrm{GPf}_n(R) = \mathrm{Pf}_n(R)/\{[\varphi] + [\psi] - [q] \mid \varphi + \psi = q \in W(R)\}$.

Теорема 1.18. Пусть $n \geq \mathrm{st}(K)$, $x \in \mathrm{GPf}_n(R)$. Тогда $x = \sum_{i=1}^m l_i \cdot [\psi_i]$, где $l_i \in \mathbb{Z}$ и ψ_i — n-формы Пфистера с попарно дизъюнктными носителями.

Если R — упорядоченно замкнутое поле (то, у которого нет упорядоченных алгебраических расширений), q — форма над R, то $q \cong \langle 1 \rangle \perp \dots \langle 1 \rangle \perp \langle -1 \rangle \perp \dots \perp \langle -1 \rangle$, и потому $W(R) = \mathbb{Z}$. Если $K \to R$ — подполе, то есть гомоморфизм сигнатуры $\mathrm{sgn} \colon W(K) \to \mathbb{Z}$. Поэтому есть $\prod \mathrm{sgn}_P \colon W(K) \to \prod_{p \in X(K)} \mathbb{Z}$, где $X(K)$ — множество всех упорядочений поля K. **Носителем** формы q называется множество p таких, что $\mathrm{sgn}_p(q) \neq 0$.

Теорема 1.19 (Pfister)**.** $\mathrm{Ker}(\prod \mathrm{sgn}_p)$ совпадает с кручением $W(K)$.

Предложение 1.20. Рассмотрим гомоморфизм $h_n \colon \mathrm{GPf}_n(R) \to I^n(R)$. Тогда h_n — изоморфизм при $n \geq \mathrm{st}(K)$.

Доказательство. Сюръективность h_n очевидна. Докажем инъективность. В $W(K)$ нет кручения, потому $I^n(K) \to \prod_p \mathbb{Z}$ — инъекция. Если $x \in \mathrm{GPf}_n(R)$, то $x = \sum l_i \cdot [x_i]$ по теореме 1.18. Сквозное отображение переводит его в $0 \in \prod_p \mathbb{Z}$. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
 & & k_n^M(R) \arrow[dl] \arrow[d, "e_n"] & \\
\underline{I_{n+1}}(R) \arrow[r, "\xi_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & \underline{I_n}(R) \arrow[r, "\overline{f_n}"] \arrow[d, "f_n"] & I^n(R)/I^{n+1}(R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
I^{n+1}(R) \arrow[r] & I^n(R) \arrow[r] & I^n(R)/I^{n+1}(R) &
\end{tikzcd}
$$

Здесь стрелка $k_n^M(R) \to \underline{I_n}(R)$ переводит $\{a_1, \ldots, a_n\}$ в $[a_1, \ldots, a_n] \perp \mathrm{Im}(\xi_{n+1})$. Из рассмотрения диаграммы видно, что если все верно для какого-то n, то верно и для больших n.

Мы построим отображение $\mathrm{GPf}_n \to \underline{I_n}$, которое в композиции с $f_n \colon \underline{I_n} \to I^n(R)$ даст инъективное h_n. Поэтому и f_n окажется инъективным. В GPf_n мы добавили соотношение, нужно лишь проверить, что оно есть и в $\underline{I_n}$. Это делается прямым вычислением.