О нулевой стабильной мотивной гомотопической группе аффинной кривой

Алексей Ананьевский

07.04.2016

1 Формулировка основного результата

Пусть все происходит над совершенным полем k.

Теорема 1.1 (Суслин–Воеводский)**.** Пусть C — гладкая проективная кривая, $D \subseteq C$ — замкнутое гладкое подмножество, $C_0 = C - D$. Тогда $H_0^s(C_0) = \operatorname{Pic}(C, D)$, где

$$H_0^s(C_0) = \operatorname{Coker}(\mathbb{Z}^{tr}(C_0)(\mathbb{A}^1) \to \mathbb{Z}^{tr}(C_0)(\mathrm{pt})).$$

Теорема 1.2 (Asok–Haesemeyer)**.** Пусть X — гладкое проективное многообразие размерности n. Тогда

$$[\mathbb{S}, \Sigma_T^\infty X_+] = H^n(X, K_n^{MW} \otimes \omega_X).$$

Эти теоремы чем-то похожи. Обозначим $(\mathbb{G}_m)^D_{C,D} = \{f \in \mathcal{O}^*_{C,D} \mid f(D) = 1\}$. Тогда по определению

$$\operatorname{Pic}(C, D) = \operatorname{Coker}((\mathbb{G}_m)^D_{C,D}(k(C)) \to \bigoplus_{x \in C_0^{(1)}} \mathbb{Z})$$

С другой стороны, в утверждении теоремы 1.2 в правой части стоят когомологии комплекса

$$K_n^{MW} \otimes \omega_X(k(X)) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_{n-1}^{MW} \otimes \omega_x(k(x)) \to \cdots \to \bigoplus_{x \in X^{(n)}} K_0^{MW}(k(x)).$$

в последнем члене. Кроме того, $K_0^{MW}(k(x)) = GW(k(x))$. Правильнее написать другой комплекс:

$$i_* K_n^{MW} \otimes \omega_{k(X)} \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} (i_x)_* K_{n-1}^{MW} \otimes \omega_x \to \cdots \to \bigoplus_{x \in X^{(n)}} (i_x)_* K_0^{MW}.$$

Для локального кольца у этого комплекса нет когомологий (кроме нулевого члена), и остается только стрелка $K_n^{MW} \otimes \omega_X \to i_* K_n^{MW} \omega_{k(X)}$.

Вернемся к морфизму

$$(\mathbb{G}_m)^D_{C,D}(k(C)) \to \bigoplus_{x \in C_0^{(1)}} \mathbb{Z}.$$

Его можно записать в виде

$$K_1^M(k(C)) \to \bigoplus_{x \in C_0^{(1)}} K_0^M(k(x)),$$

поскольку $(\mathbb{G}_m)^D_{C,D}$ можно представить в виде

$$\operatorname{Ker}\left(\operatorname{Ker}\left((i_{k(C)})_* \mathcal{O}^* \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in D} (i_x)_* \mathbb{Z}\right) \xrightarrow{i^*} \bigoplus_{x \in D} (i_x)_* \mathcal{O}^*\right).$$

Представим наш морфизм как морфизм пучков

$$(\mathbb{G}_m)^D_{C,D} \to \bigoplus_{x \in C_0^{(1)}} (i_x)_* \mathbb{Z}$$

Обозначим $(\mathbb{G}_m)_{C,D} = \operatorname{Ker}(\mathbb{G}_m \to (i_D)_* \mathbb{G}_m)$. Тогда имеется точная последовательность

$$(\mathbb{G}_m)_{C,D} \to (\mathbb{G}_m)^D_{C,D} \to \bigoplus_{x \in C_0^{(1)}} (i_x)_* \mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Pic}(C, D) = H^1_{\text{Nis}}(C, (K_1^M)_{C,D}),$$

где $(K_1^M)_{C,D} = \operatorname{Ker}(K_1^M \to (i_D)_* K_1^M) = (K_1^M)_{C,D} \otimes \omega_C$.

Теорема 1.3. Пусть C, D, C_0 как выше. Тогда

$$\begin{aligned}
[\mathbb{S}, \Sigma_T^\infty (C_0)_+] &\cong H^1(C^*_{RS}(C, D; \Omega_C, H_0^t(\mathbb{S})(1))) \\
&\cong H^1_{\text{Nis}}(C, (K_1^{MW})_{C,D} \otimes \omega_C) \\
&\cong H^1_{\text{Zar}}(C, (K_1^{MW})_{C,D} \otimes \omega_C).
\end{aligned}$$

Здесь по определению $(K_1^{MW})_{C,D} = \operatorname{Ker}(K_1^{MW} \to (i_0)_* K_1^{MW})$.

Замечание 1.4. Аналогичная теорема верна, если слева вместо $\mathbb{S}$ написать $\Sigma^m_{\mathbb{G}_m} \mathbb{S}$.

Поясним, что такое $C^*_{RS}(C, D; \omega_C, H_0^t(\mathbb{S})(1))$: это двучленный комплекс

$$(K_1^{MW})^D_{C,D}(k(C); \omega_C) \to \bigoplus_{x \in C^{(1)}} GW(k(x)),$$

где в левой части стоит $(K_1^{MW})^D_{C,D}(\Sigma_T^{-1} \operatorname{Th}(\omega_C|_{k(C)}))$.

2 Основные определения

Определение 2.1. Пусть $A \in \mathrm{SH}(k)$, $U \in \mathrm{Sm}_k$. Обозначим $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n(U) = [\Sigma^i_{S^1} U, \Sigma^n_{\mathbb{G}_m} A]$. Мы получили предпучок $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n$ (обычно он обозначается через $\pi^{\mathbb{A}^1}_{i-n,-n}(A)$).

Обозначим через $\underline{\pi_i^{\mathbb{A}^1}}(A)_n(-)$ ассоциированный пучок в топологии Зариского.

Замечание 2.2. $\underline{\pi_i^{\mathbb{A}^1}}(A)_n(-)$ является пучком Нисневича. Это получается применением следующей леммы.

Лемма 2.3. Если $\mathcal{F}$ — $\mathbb{Z}F_*$-предпучок, σ-квазистабильный, гомотопически инвариантный, то $\mathcal{F}_{\text{Zar}} = \mathcal{F}_{\text{Nis}}$.

Доказательство. Рассмотрим морфизм $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_{\text{Nis}}$. Нужно понять, что ростки в топологии Зариского совпадают, то есть, что $\mathcal{F}(U) \cong \mathcal{F}_{\text{Nis}}(U)$ — изоморфизм для локального U. Общая наука говорит, что $\mathcal{F}_{\text{Nis}}$ — тоже $\mathbb{Z}F_*$-предпучок, σ-квазистабильный,…, и что таким же свойством обладают ядро и коядро этого морфизма:

$$\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{\text{Nis}} \twoheadrightarrow \mathcal{B}.$$

Значения на локальном кольце вкладываются в значения на общей точке:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{A}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\text{Nis}}(U) & \longrightarrow & \mathcal{B}(U) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathcal{A}(k(U)) & \longrightarrow & \mathcal{F}(k(U)) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\text{Nis}}(k(U)) & \longrightarrow & \mathcal{B}(k(U))
\end{array}$$

Но для полей $\mathcal{F}(k(U)) \cong \mathcal{F}_{\text{Nis}}(k(U))$, потому $\mathcal{A}(k(U)) = 0 = \mathcal{B}(k(U))$, откуда $\mathcal{A}(U) = 0 = \mathcal{B}(U)$. □

Определение 2.4. Пусть E/X — расслоение ранга r. Рассмотрим предпучок $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n(-;E)$ на Sm_k/X, заданный формулой

$$\pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n(Y;E) = [\Sigma_{S^1}^{i-r}\operatorname{Th}(f^*E), \Sigma_{\mathbb{G}_m}^{r+n}A],$$

где $f\colon Y \to X$ — структурный морфизм.

Замечание 2.5. В определении 2.4 появились сдвиги $\pm r$ для того, чтобы был изоморфизм $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n(Y;\mathbf{1}^r) \cong \pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n(Y)$ для тривиального расслоения $\mathbf{1}^r$.

На $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n(X;E)$ есть действие $\mathrm{GL}(E)$. На $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n(X) = \pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n(X;\mathbf{1}^r)$ есть действие $\mathrm{GL}_r(k[X])$.

Лемма 2.6.

1. $\alpha\cdot a = \alpha\cdot a^{-1}$, где $\alpha\in\pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n(X)$, $a\in k[X]^*$;
2. $\alpha\cdot g = \alpha\cdot\det(g)$, где $\alpha\in\pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{X,x})$, $g\in\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{X,x})$.

Доказательство. Несложно: для доказательства первой части нужно заметить, что матрица $\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$ элементарна, а для второй части — что над локальным кольцом любая матрица определителя 1 элементарна. □

Определение 2.7. Пусть L/X — линейное расслоение. Определим предпучок $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n\otimes L$, задав

$$(\pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n\otimes L)(Y) = \pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n(Y)\otimes_{\mathbb{Z}[k[Y]^*]}\mathbb{Z}[f^*\mathcal{L}^0(Y)],$$

где $\mathcal{L}^0(Y)$ — глобальные нигде не нулевые сечения L.

Лемма 2.8. Пусть E/X — векторное расслоение ранга r. Тогда есть канонический изоморфизм пучков

$$\underline{\pi_i^{\mathbb{A}^1}}(A)_n(-;E)\cong\underline{\pi_i^{\mathbb{A}^1}}(A)_n\otimes\det E.$$

Как следствие, оба этих пучка изоморфны $\underline{\pi_i^{\mathbb{A}^1}}(A)_n(-;\det E)$.

Доказательство. Положим $L=\det E$ и рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_i^{\mathbb{A}^1}(a)_n(Y;\mathbf{1}_X^r)\times\mathbb{Z}[iso(f^*E,\mathbf{1}_Y^r)] \arrow[dl] \arrow[d] \\
\pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n(Y;E) & \pi_i^{\mathbb{A}^1}(A)_n(Y)\otimes_{\mathbb{Z}[k[Y]^*]}\mathbb{Z}[f^*\mathcal{L}^0(Y)]
\end{tikzcd}$$

с билинейными морфизмами. Вместо прямого произведения нам хочется написать тензорное произведение над $\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_r(Y)]$. Первая стрелка согласована с действием $\mathrm{GL}_r(Y)$, поэтому проблем нет. Вторая стрелка не вполне согласована, поэтому диаграммы предпучков не получится, но получится диаграмма пучков □

Заметим также, что в теореме можно написать $\underline{\pi_i^{\mathbb{A}^1}}(A)_n\otimes(\det E\otimes L^{\otimes 2})$ вместо $\underline{\pi_i^{\mathbb{A}^1}}(A)_n\otimes\det E$.

Пусть X — гладкое размерности n. Рассмотрим цепочку вложений

$$\varnothing = U_\alpha^0\subseteq U_\alpha^1\subseteq\cdots\subseteq U_\alpha^{(n)}\subseteq U_\alpha^{(n+1)} = X,$$

такую, что

1. $Z_\alpha^p = U_\alpha^{(p+1)} - U_\alpha^{(p)}$ гладкие и равноразмерные;
2. $\dim Z_\alpha^{(p)}\le n-p$.

Тогда для любого $A \in \mathrm{SH}(k)$ имеется длинная точная последовательность

$$\dots \to [U_\alpha^{(p+1)}]/U_\alpha^{(p)}, A[m]] \to [U_\alpha^{(p+1)}, A[m]] \to [U_\alpha^{(p)}, A_[m]] \to [U_\alpha^{(p+1)}/U_\alpha^{(p)}, A[m+1]]$$

При этом $U_\alpha^{(p+1)}/U_\alpha^{(p)} \cong \mathrm{Th}(N_{Z_\alpha}^{(p)/X})$. Поэтому $[\mathrm{Th}(N_{Z_\alpha}^{(p)/X}), A[m]] = \pi_{p-m}^{\mathbb{A}^1}(A)_{-p}(Z_\alpha^{(p)}; N_{Z_\alpha^{(p)}/X})$. Переходя к копределу, получаем длинную точную последовательность

$$\dots \to \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \pi_{p-m}^{\mathbb{A}^1}(A)_{-p}(\operatorname{Spec} k(X); \Lambda_x^X) \to \operatorname{colim}_\alpha [U_\alpha^{(p+1)}, A[m]] \to \operatorname{colim}_\alpha [U_\alpha^{(p)}, A[m]] \to \dots,$$

где $\Lambda_x^X = \det N_{x/X}$ Из таких длинных точных последовательностей можно соорудить одну спектральную последовательность коразмерности носителя:

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \pi_{-q}^{\mathbb{A}^1}(A)_{-p}(\operatorname{Spec} k(X); \Lambda_x^X) \Rightarrow [X, A[p+q]].$$

Возьмем замкнутое $Z \subseteq X$ и обозначим $U = X - Z$. Есть еще спектральная последовательность

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \pi_{-q}^{\mathbb{A}^1}(A)_{-p}(\operatorname{Spec} k(X); \Lambda_x^X) \Rightarrow [X/U, A[p+q]].$$

Пусть теперь $A = M$ лежит в сердцевине гомотопической t-структуры (то есть, $\underline{\pi_i^{\mathbb{A}^1}}(M)_n = 0$ при $i \neq 0$). Тогда эта спектральная последовательность устроена очень просто. Комплекс Роста–Шмида в этом случае выглядит так:

$$\bigoplus_{\substack{x \in X^{(0)} \\ x \in Z}} M_0(\operatorname{Spec} k(x)) \to \bigoplus_{\substack{x \in X^{(1)} \\ x \in Z}} M_{-1}(\operatorname{Spec} k(X); \Lambda_x^X) \to \dots \to \bigoplus_{\substack{x \in X^{(n)} \\ x \in Z}} M_{-n}(\operatorname{Spec} k(X); \Lambda_x^X),$$

где $M_m(X; L) = \pi_0^{\mathbb{A}^1}(M)_m(X; L)$. Этот комплекс обозначается через $C_{RS}^*(X, U; M)$.

Утверждается, что $H^m(C_{RS}^*(X, U; M) \cong [X/U, M[m]] \cong H_Z^m(X; M_0)$.