О нулевой стабильной мотивной гомотопической группе аффинной кривой (окончание)

Алексей Ананьевский

21.04.2016

Напоминаем, что везде k — бесконечное совершенное поле.

1 Основная теорема

Пусть C — гладкая кривая, $D \subseteq C$ — конечный набор замкнутых точек.

Посмотрим на открытые множества $U_\alpha \subseteq C$, содержащие D. Тогда для любого $M \in \mathrm{SH}_{t=0}(k)$ есть длинная точная последовательность, происходящая из треугольника $U_\alpha \to C \to C/U_\alpha$:

$$\cdots \to [C/U_\alpha, M[m]] \to [C, M[m]] \to [U_\alpha, M[m]] \to [C/U_\alpha, M[m+1]] \to \ldots$$

Заменим C/U_α на $\mathrm{Th}(N_{Z_\alpha/C})$, где $Z_\alpha = C - U_\alpha$. Переходя к пределу по всем α, получаем

$$\cdots \to \bigoplus_{\substack{x\in C^{(1)}\\ x\notin D}} \pi^{\mathbb{A}^1}_{-m+1}(M)_{-1}(\operatorname{Spec} k(x), \Lambda^C_x) \to [C, M[m]] \to \pi^{\mathbb{A}^1}_{-m}(M)_0(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{C,D}) \to \ldots$$

Напомним, что $\pi^{\mathbb{A}^1}_{-m}(M)_0(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{C,D}) = H^n_{\mathrm{Nis}}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{C,D}; M_0)$. По наивным соображениям это может быть отлично от нуля только при $m = 0, 1$. Кроме того, у хороших пучков (с трансферами) нет первых когомологий на полулокальных кольцах, поэтому остается только случай $m = 0$. Выражение $\pi^{\mathbb{A}^1}_{-m+1}(M)_{-1}(\ldots)$ отлично от нуля только при $-m+1 = 0$, поскольку M из середины.

Поэтому остается точная последовательность

$$0 \to [C, M] \to M_0(\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,D})) \to \bigoplus_{\substack{x\in C^{(1)}\\ x\notin D}} M_{-1}(\operatorname{Spec} k(x); \Lambda^C_x) \to [C, M[1]] \to 0.$$

Пусть E/C — векторное расслоение ранга r. Аналогичное рассуждение показывает, что есть точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \to [\mathrm{Th}(E), M(r)[r]] \to M_0(\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,D}); \det E) \\ \to \bigoplus_{\substack{x\in C^{(1)}\\ x\notin D}} M_{-1}(\operatorname{Spec} k(x); \Lambda^C_x \otimes \det E_x) \to [\mathrm{Th}(E), M(r)[r+1]] \to 0. \end{aligned}$$

Рассмотрев отображение из $M_0(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{C,D}; \det E)$ в $M_0(D; \det E_D)$ и написав конус, получаем двучленный комплекс

$$M_0(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{C,D}; \det E) \to \bigoplus_{\substack{x\in C^{(1)}\\ x\notin D}} M_{-1}(\operatorname{Spec} k(x); \Lambda^C_x \otimes \det E_x) \oplus \bigoplus_{x\in D} M_0(\operatorname{Spec} k(x); \det E_x),$$

который будет обозначаться через $C^*_{RS}(C, D; E; M)$ (неформально говоря, это конус морфизма из комплекса Герстена для C в комплекс Герстена для D).

Лемма 1.1.

$$[\mathrm{Th}(E)/\,\mathrm{Th}(E_D), M(r)[r+m]] \cong H^m(C^*_{RS}(C,D;E;M)).$$

Доказательство. Есть длинная точная последовательность

$$\begin{aligned}\ldots \to [\mathrm{Th}(E)/\,\mathrm{Th}(E|_D), M(r)[r+m]] &\to [\mathrm{Th}(E), M(r)[r+m]]\\ \to [\mathrm{Th}(E|_D), M(r)[r+m]] &\to [\mathrm{Th}(E)/\,\mathrm{Th}(E|_D), M(r)[r+m+1]] \to \ldots\end{aligned}$$

Можно заметить, что $[\mathrm{Th}(E), M(r)[r+m]] = 0$ при $m \neq 0, 1$, и что $[\mathrm{Th}(E|_D), M(r)[r+m]] = 0$ при $m \neq 0$. Поэтому остается точная последовательность

$$\begin{aligned}0 \to [\mathrm{Th}(E)/\,\mathrm{Th}(E_D), M(r)[r]] &\to [\mathrm{Th}(E), M(r)[r]]\\ \to [\mathrm{Th}(E_D), M(r)[r]] \to [\mathrm{Th}(E)/\,\mathrm{Th}(E_D), M(r)[r+1]] &\to [\mathrm{Th}(E), M(r)[r+1]] \to 0.\end{aligned}$$

При $m = 0$ нам нужно посчитать ядро отображения $[\mathrm{Th}(E), M(r)[r]] \to [\mathrm{Th}(E_D), M(r)[r]]$. Остается посмотреть на коммутативный квадрат

$$\begin{array}{cc} [\mathrm{Th}(E), M(r)[r]] & M_0(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{C,D}; \det E) \\ & \\ [\mathrm{Th}(E_D), M(r)[r]] & M_0(D; \det E_D) \end{array}$$

Заметим также, что при $m \neq 0, 1$ обе части равны 0. Пусть теперь $m = 1$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму, полученную из треугольников $\mathrm{Th}(E_D) \to \mathrm{Th}(E) \to \mathrm{Th}(E)/\,\mathrm{Th}(E_D)$ и $\mathrm{Th}(E|_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{C,D}}) \to \mathrm{Th}(E) \to \mathrm{Th}(E)/\,\mathrm{Th}(E|_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{C,D}})$:

$$\begin{tikzcd}
{[\mathrm{Th}(E_D), M(r)[r]]} \arrow[d, equal] & & & \\
M_0(D; \det E) \arrow[r] & {[\mathrm{Th}(E)/\,\mathrm{Th}(E_D), M(r)[r+1]]} \arrow[r] & {[\mathrm{Th}(E), M(r)[r+1]]} \arrow[r] & 0 \\
(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{C,D}; \det E) \arrow[u, "i_D^*"] \arrow[r, "\partial"] & \bigoplus M_{-1}(\mathrm{Spec}\,k(x); \Lambda^C_x \otimes \det E_x) \arrow[u] \arrow[r] & {[\mathrm{Th}(E), M(r)[r+1]]} \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Остается заметить, что $M_{-1}(\mathrm{Spec}\,k(x); \Lambda^C_x \otimes \det E_x) = [E/(E-x), M(r)[r+1]]$. $\square$

Определение 1.2. Рассмотрим пучок $(M_0)^D_C(U; E) = M_0(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{U,D_U}; E)$, где $U \xrightarrow{f} C$ этально, и $D_U = U \times_f D$. Альтернативно,

$$(M_0)^D_C = \mathrm{Ker}\left(\bigoplus_{x\in C^{(1)}} (i_x)_* M_0(-, \det E) \to \bigoplus_{x\in D} (i_x)_* M_{-1}(-; \Lambda^C_x \otimes \det E_x)\right).$$

Кроме того, положим $(M_0)_{C,D} = \mathrm{Ker}(M_0 \to (i_D)_* M_0)$. Иными словами,

$$(M_0)_{C,D}(U) = \mathrm{Ker}(M_0(U) \to M_0(D_U)).$$

Комплекс пучков

$$(M_0)^D_C(-; \det E) \to \bigoplus_{\substack{x\in C(1)\\ x\notin D}} (i_x)_* M_{-1}(-; \Lambda^C_x \otimes \det E_x) \oplus \bigoplus_{x\in D} (i_x)^*(M_0)(-; \det E_x)$$

будем обозначать через $C^*_{RS}(-, D; E; M)$.

Лемма 1.3. $H^m_{\mathrm{Zar}}(C, (M_0)^D_C) = H^m_{\mathrm{Nis}}(C, (M_0)^D_C) = 0$ при $m \geq 1$.

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 1.4. Комплекс $(M_0)_{C,D}(-;\det E) \to C^*_{RS}(-,D;E;M)$.

1. является резольвентой в Nis;
2. является резольвентой в Zar, если для любой точки $x \in C^{(1)}$ отображение

$$M_0(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{C,x}) \to M_0(k(x))$$

сюръективно.

Теорема 1.5.

$$[\mathrm{Th}(E)/\mathrm{Th}(E_D), M(r)[r+m]] \cong H^m(C^*_{RS}(C,D;E;M)) \cong H^m_{\mathrm{Nis}}(C,(M_0)_{C,D}\otimes\det E).$$

Кроме того, если $M_0(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{C,x}) \to M_0(k(x))$ сюръективно для всех $x \in C^{(1)}$, то это изоморфно также $H^m_{\mathrm{Zar}}(C,(M_0)_{C,D}\otimes\det E)$.

Доказательство. Сразу следует из сформулированных выше лемм. □

2 Применения

Теорема 2.1. Пусть C_0 — гладкая кривая, C — ее гладкая компактификация, $D = C - C_0$. Тогда

$$\begin{aligned}[\mathbb{S}(m), C_0] &\cong H^1(C^*_{RS}(C,D;\omega_C;H^t_0(\mathbb{S})(1-m)))\\ &\cong H^1_{\mathrm{Nis}}(C;(K^{MW}_{1-m})_{C,D}\otimes\omega_C)\\ &\cong H^1_{\mathrm{Zar}}(C;(K^{MW}_{1-m})_{C,D}\otimes\omega_C)\end{aligned}$$

Замечание 2.2. Комплекс $C^*_{RS}(C,D;\omega_C;H^t_0(\mathbb{S})(1-m))$ выглядит так:

$$K^{MW}_{1-m}(\mathcal{O}_{C,D};\omega_C) \to \bigoplus_{x\in C_0^{(1)}} K^{MW}_{-m}(\operatorname{Spec}k(x)) \oplus \bigoplus_{x\in D} K^{MW}_{1-m}(\operatorname{Spec}k(x);(\omega_C)|_x).$$

Например, при $m = 0$ получаем

$$K^{MW}_1(\mathcal{O}_{C,D};\omega_C) \to \bigoplus_{x\in C_0^{(1)}} GW(k(x)) \oplus \bigoplus_{x\in D} K^{MW}_1(k(x);(\omega_C)|_x).$$

Этот комплекс на самом деле квази-изоморфен комплексу

$$\{f \in K^{MW}_1(\mathcal{O}_{C,D}) \mid f(D) = 0\} \to \bigoplus_{x\in C_0^(1)} GW(k(x)).$$

Доказательство теоремы 2.1. Заметим, что

$$[\mathbb{S}(m), C_0] \cong [C_0^\vee, \mathbb{S}(-m)] \cong [C_0^\vee, H^t_0(\mathbb{S}(-m))]$$

Рассмотрим последовательность $C_0 \to C \to C/C_0 \cong \mathrm{Th}((T_C)|_D)$. Переходя к двойственным, получаем

$$\begin{tikzcd}
C_0^\vee & C^\vee \arrow[l] \arrow[d, equal] & (\mathrm{Th}((T_C)|_D))^\vee \arrow[l] \arrow[d, equal] \\
\Sigma_T^{-N}\mathrm{Th}(E)/\mathrm{Th}(E|_D) & \mathrm{Th}(-T_C) \arrow[l] & \mathrm{Th}(-(T_C)|_D) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Учитывая это, и тот факт, что ранг E равен $r = N - 1$, получаем

$$\begin{aligned}[C_0^\vee, H_0^t(\mathbb{S}(-m))] &\cong [\Sigma_T^{-N} \operatorname{Th}(E)/\operatorname{Th}(E|_D), H_0^t(\mathbb{S}(-m))] \\ &\cong [\operatorname{Th}(E)/\operatorname{Th}(E|_D), H_0^t(\mathbb{S}(r-m+1))[r+1]] \\ &\cong H^1(C^*_{RS}(C, D; E; M)),\end{aligned}$$

где в последней строчке мы воспользовались теоремой 1.5 (случай $m = 1$). □

Замечание 2.3. Если $m = 0$, есть хорошее отображение из $[\mathbb{S}, C_0]$ по рациональной точке x. Ему соответствует 1 на соответствующем слагаемом.