Расслоения на арифметических схемах

Сергей Яковенко

28.04.2016

1 Теорема Римана–Роха

Есть кривая C (например, $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$), есть поле функций $K(C)$ на ней ($\mathbb{Q}$). Если $f \in K(C)^*$, то сумма порядков ее нулей и полюсов равна нулю. Аналогично, если $q \in \mathbb{Q}$, то $\prod_{p\in\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} p^{v_p(q)} = |q|$, поэтому $\sum_{p\in\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} v_p(q)\cdot\log p + v_\infty(q) = 0$, где $v_\infty(q) = -\log|q|$.

Арифметическое многообразие — регулярная схема, проективная и плоская над $\mathbb{Z}$.

Неформально говоря, многообразие Аракелова X — это объединение X_0 и X_∞, где X_0 — арифметическое многообразие, а X_∞ — «слои на бесконечности».

Что известно про расслоения на арифметических многообразиях? Пусть $X_0 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$; вместо $\mathbb{Z}$ можно взять любую дедекиндову область A.

Известно, что любое линейное расслоение имеет вид $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ (теорема Серра).

Теорема Биркгофа–Гротендика: любое расслоение есть сумма линейных.

Теорема Ханны: если A — область главных идеалов, то оно допускает фильтрацию, все факторы которой линейны или ранга 2. Второй результат: если есть расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^1_A$, где A эвклидово, то оно допускает фильтрацию, все факторы которой линейны.

Идея доказательства: Для того, чтобы вложить $\mathcal{O}(-n)$ в E, нужно найти сечение $s \in H^0(\mathbb{P}^1_A, E(n))$, не обращающееся в 0. Пусть $s_1, s_2 \in H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}, E(n)_{\mathbb{Q}})$. У ограничений s_1, s_2 на U_0 есть общий ноль только в $x = 0$; у ограничений s_1, s_2 на U_1 нет общих нулей. Такие сечения можно склеить и получить искомое s. Дело в том, что для любой матрицы $\sigma \in \mathrm{GL}_2(A[x, x^{-1}])$ найдутся $\rho \in \mathrm{GL}_2(A[x])$, $\lambda \in \mathrm{GL}_2(A[x^{-1}])$ такие, что $\rho\sigma\lambda \in B(A[x, x^{-1}])$.

Вообще для классификации расслоений придумана Спектральная последовательность Бейлинсона Если $\pi\colon E \to \mathbb{P}^n_A$ — расслоение, то $E_1^{pq} = R^q\pi_*(E(p)) \otimes \Omega^{-p}_{\mathbb{P}^n_A}(p)$, и $E_\infty^{pq} = 0$, если $p + q \neq n$, и $E^i_\infty = E$ только при $i = 0$.

Пусть X — комплексное проективное многообразие с кэлеровой метрикой h_X. По h строится форма ω_X такая, что $d\omega_X = 0$. Есть форма объема $\mu = \omega^d/d!$. Как обычно, есть $A^{0,q}(X) = C^\infty(X, \Lambda^q(TX^*))$, $A^{0,q}(X, E) = A^{0,q}(X) \otimes C^\infty(X, E)$, операторы ∂ и $\overline{\partial}$, $A^n = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}$.

Обобщенные дифференциальные формы (потоки): $D_n = (A^n(X))^*$ с понятием сходимости по Шварцу. Определим $D^{p,q}(X) = D_{d-p,d-q}(X)$, где $d = \dim_{\mathbb{C}}(X)$. Разумеется, есть вложение

$$A^{p,q}(X) \hookrightarrow D^{p,q}(X),$$
$$w \mapsto [w],$$

где $[w]\alpha = \int_X w \wedge \alpha$ для всех $\alpha \in A^{d-p,d-q}$. Это вложение коммутирует с дифференциалами. Если $i\colon Z \hookrightarrow X$ — подмногообразие, то есть δ-функция $\delta_Z(\alpha) = \int_Z i^*\alpha$. Есть **оператор Лапласа** $-\frac{1}{2\pi i}\partial\overline{\partial}$.

Пусть $Y \hookrightarrow X$ — подмногообразие коразмерности p. **Формой, соответствующей** Y, называется форма $g_Y \in D^{p-1,q-1}$ такая, что

$$-\frac{1}{2\pi i}\partial\overline{\partial}g_Y + \delta_Y = [w_Y]$$

для некоторой гладкой (p,p)-формы w_Y.

Теорема 1.1 (Poincaré–Lelong)**.** Пусть $L \to X$ — голоморфное линейное расслоение. На L есть эрмитова метрика $||\cdot||$. Есть класс Черна $c_1(L, ||\cdot||)$. Пусть s — мероморфное сечение L. Тогда $-\log ||s||^2 \in L^1(X)$ и для $[l \log ||s||^2] \in D^{0,0}(X)$ выполнено

$$-\frac{1}{2\pi i}\partial\overline{\partial}[-\log ||s||^2] + \delta_{\operatorname{div} S} = [c_1(L, ||\cdot||)].$$

Пусть Z, Y — циклы на X. Тогда есть соответствующие «функции Грина» g_Z, g_Y. Важно, что можно определить их «свертку» $g_Z * g_Y = g_Y\delta_Z + w_Y g_Z$.

Пусть теперь X — арифметическое многообразие **Группа арифметических циклов** $\widehat{Z}^p(X)$ состоит из пар (Z, g_Z), где Z — цикл коразмерности p, g_Z — функция Грина на $Z(\mathbb{C})$. Рассмотрим подгруппу $\widehat{R}^p(X) \le \widehat{Z}^p(X)$, порожденную парами вида $(\operatorname{div} f, [-\log |f|^2])$ и $(0, \partial u + \overline{\partial} v)$, где $f \in (k(Y))^*$ для некоторого $Y \in X^{(p-1)}$, u — форма степени $(p-1, p)$, v – форма степени $(p, p-1)$. **Группа Чжоу** определяется так: $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X) = \widehat{Z}^p/\widehat{R}^p$.

Замечание 1.2. $\widehat{CH}^1(X) = \widehat{\mathrm{Pic}}(X)$. В частности, для $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ получаем $\widehat{\mathrm{Pic}}(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{R}$.

Пусть $f\colon X \to Y$ — хороший морфизм арифметических схем. Тогда есть

$$f_*\colon \widehat{\mathrm{CH}}^p(X) \to \widehat{\mathrm{CH}}^{p-\delta}(Y),$$

где $\delta = \dim Y - \dim X$.

Пусть X — комплексное многообразие. **Метризованное расслоение** — это пара (E, h), где $E \to X$ — расслоение, а h — эрмитова метрика на E. Через $\overline{\mathcal{O}(n)}$ мы будем обозначать $\mathcal{O}(n)$ с метрикой Фубини–Штуди. Можно определить связность $\nabla\colon A^0(E) \to A^1(E)$, $\nabla(fe) = df \otimes e + f\nabla e$, кривизну $\nabla^2\colon A^0(E) \to A^2(E)$.

Есть характер Черна $\mathrm{ch}\colon K_0 \to \mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$.

Пусть $\overline{\mathcal{E}}\colon 0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ — короткая точная последовательность расслоений, и пусть на каждом E_i задана метрика h_i. У нас есть разложение в прямую сумму $E_2 = E_1 \oplus E_3$ как топологических (комплексных) расслоений, но оно не обязано быть изоморфизмом алгебраических расслоений. Утверждается, что $\widetilde{\mathrm{ch}}(\overline{\mathcal{E}}) = 0$ тогда и только тогда, когда $E_2 = E_1 \oplus E_3$ в алгебраическом и в метрическом смысле.

Теперь можно определить $\widehat{K}_0(X)$ как группу, порожденную парами $((E, h), \eta)$, где $\eta \in \bigoplus A^{p,p}(X)$, с такими соотношениями: если $\mathcal{E}\colon 0 \to E' \to E \to E'' \to 0$, на E', E, E'' есть метрики h', h, h'', и $\eta = \eta' + \eta''$, то

$$(\overline{E}', \eta') + (\overline{E}'', \eta'') = (\overline{E}, \eta' + \eta'' + \widehat{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}))$$

(здесь $\overline{E} = (E, h)$, и аналогично для $\overline{E'}$, $\overline{E''}$).

Что мы знаем про $\widehat{\mathrm{ch}} \in \widehat{\mathrm{CH}}^*(X)_{\mathbb{Q}}$?

1. они коммутируют с f^*;

2. $\widehat{\mathrm{ch}}(\overline{E} \oplus \overline{F}) = \widehat{\mathrm{ch}}(\overline{E}) + \widehat{\mathrm{ch}}(\overline{F})$;

3. $\widehat{\mathrm{ch}}(\overline{L}) = \exp(\widehat{c_1}(L))$.

Здесь $\widehat{c_1}(L) = (\operatorname{div} s, -\log ||s||^2)$. Разумно определить $\widehat{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}) = \widehat{\mathrm{ch}}(\overline{E_1}) - \widehat{\mathrm{ch}}(\overline{E_2}) + \widehat{\mathrm{ch}}(\overline{E_3})$ для короткой точной последовательности $\mathcal{E}$.

Теорема 1.3 (Gillet–Soulé)**.** Определим $\widehat{\mathrm{ch}}((E,h),\eta)=\widehat{\mathrm{ch}}(E,h)+(0,\eta)$. Тогда $\widehat{\mathrm{ch}}\colon \widehat{K}_0(X)_{\mathbb{Q}}\to \widehat{\mathrm{CH}}(X)_{\mathbb{Q}}$ — изоморфизм

Пусть $f\colon X\to Y$. Есть коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \widehat{K}_0(X)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \widehat{\mathrm{CH}}(X)_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "f_*"] \\ \widehat{K}_0(Y)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\widehat{\mathrm{ch}}"] & \widehat{\mathrm{CH}}(Y)_{\mathbb{Q}}, \end{tikzcd}$$

в которой хочется построить морфизм $f_*\colon \widehat{K}_0(X)_{\mathbb{Q}}\to\widehat{K}_0(Y)_{\mathbb{Q}}$. В классической ситуации вместо $\widehat{\mathrm{ch}}$ стоит $\mathrm{Td}(f)\cdot\mathrm{ch}$, где Td — класс Тодда. В нашей ситуации построение нужного f_* гораздо сложнее.

Пусть $E\to X$ — расслоение. Если f ациклично, то R^0f_*E — тоже расслоение. Рассмотрим $H^0(X(\mathbb{C})_b, E(\mathbb{C})|_{X(\mathbb{C})_b})$, где $b\to Y$ — точка. Заведем метрику

$$\langle s,t\rangle_{L^2}=C\int_{X(\mathbb{C})_b}h^E(s,t)\frac{\omega^d}{d!}.$$

У нас есть $\mathrm{ch}(f_*E)=f_*(\mathrm{ch}(E)\,\mathrm{Td}\,f)$ и $\mathrm{ch}(R^0f_*E,f_*h^E)$. Оказывается, что они плохо связаны. А именно, можно определить «аналитическое кручение» $T(h^Y,h^E)$ формулой

$$-\frac{1}{2\pi i}\partial\overline{\partial}T(h^X,h^E)=\mathrm{ch}(R^0f_*E,f_*h^E)-\int_X\mathrm{ch}(E)\,\mathrm{Td}\,.$$

Это сделали Ray, Singer. Тогда

$$f_*((E,h^E)+\eta)=(R^0f_*E,f_*h^E)-T(h^X,h^E)+\int\mathrm{Td}(\overline{TF_{\mathbb{C}}})\eta.$$

Если есть расслоение E, можно определить детерминантное многообразие. $\lambda(E)=\bigotimes H^q(X,E)^{(-1)^q}$. Как посчитать $c_1(\lambda(E),-)$? Если положить $h_Q=h_{L^2}\cdot\exp(T(X,Y))$, то можно посчитать $c_1(\lambda(E),h_Q)$.

Теперь появилась коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \widehat{K}_0(X)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\mathrm{Td}^A\cdot\mathrm{ch}"] \arrow[d, "f_*"] & \widehat{\mathrm{CH}}(X)_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "f_*"] \\ \widehat{K}_0(Y)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\widehat{\mathrm{ch}}"] & \widehat{\mathrm{CH}}(Y)_{\mathbb{Q}}, \end{tikzcd}$$

Здесь $\mathrm{Td}^A(f)=(1-R(f_{\mathbb{C}}))\widehat{\mathrm{Td}}(f).$, где $R(f_{\mathbb{C}})$ — магический инвариант. Его посчитал Цагир и получил, что

$$R(x)=\sum_{\substack{m\text{ нечетно},\\ m\geq 1}}(2\zeta'(-m)+\zeta(m)(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}))x^m,$$

и тогда $R(f_{\mathbb{C}})=R(c_1(N_{X/y}))$.

Оказывается, что $\widehat{c_1}(\lambda(E),h_Q)=\widehat{c_1}(E,h)=\xi_Q=f_*(\widehat{\mathrm{ch}}\,\mathrm{Td}^A)$. Например, $\xi_Q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})=\frac{1}{4}-2\zeta'(-1)$.

Эйлерова характеристика ξ_Q выражается в терминах объемов решеток вида

$$\frac{H^0(X_{\mathbb{C}},E_{\mathbb{C}})}{H^0(X,E)}.$$

2 Задача

$\mathbb{Z}^2$ — расслоение над $\mathbb{Z}$. Расслоение в модели Аракелова — это изоморфизм $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^2 = \mathcal{O} + \mathcal{O}$. Хотим найти $\sup_\alpha \min_s h(s,s)$. Это задача про квадратичную форму $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$. Давно известно, что это $\sqrt{4D/3}$. Хочется показать, что $\sqrt{D}$ — это $\widehat{c_1}$ от решетки.

Литература:

- Soulé, Abramovich, …, *Introduction to Arakelov Theory.*
- Deligne (1978), *Determinants of Cohomology.*