Мотивный вариант теоремы Сегала (продолжение)

Иван Панин

28.09.2016

1 Базовые определения из работы Мореля–Воеводского

Здесь мы определим две вещи:

- simplicial model category structure on $s\,\mathrm{Shv}(k)$;
- $\mathbb{A}^1$-model category structure on $\Delta^{\mathrm{opp}}\,\mathrm{Shv}(k)$.

Определение 1.1. Пусть $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — морфизм симплициальных пучков.

1. f называется **слабой эквивалентностью** (weak equivalence), если для всех $U \in \mathrm{Sm}/k$ и для всех $u \in U$ морфизм на ростках $u^*(\mathcal{X}) \to u^*(\mathcal{Y})$ — слабая эквивалентность симплициальных множеств.

2. f называется **корасслоением** (cofibration) тогда и только тогда, когда f — мономорфизм.

3. f называется **расслоением** (fibration) тогда и только тогда, когда f обладает right lifting property по отношению к любому корасслоению, которое является слабой эквивалентностью. Иными словами, если задана коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "weq\cap cof"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] & \mathcal{Y}, \end{tikzcd}$$

то существует морфизм $g\colon B \to \mathcal{X}$ такой, что полученная диаграмма коммутативна.

Будем обозначать через W_s (соответственно, C, F_s) классы слабых эквивалентностей (соответственно, корасслоений, расслоений)

Теорема 1.2 (2.1.4 в [MV])**.** W, задают на категории $\Delta^{\mathrm{opp}}\,\mathrm{Shv}(\mathrm{Sm}/k)$ структуру модельной категории.

Эта структура называется в [MV] **симплициальной модельной структурой**. Всюду далее, если не оговорено противное, только эту структуру мы и будем рассматривать на $\Delta^{\mathrm{opp}}\,\mathrm{Shv}(\mathrm{Sm}/k)$.

Определение 1.3. Соответствующая гомотопическая категория обозначается через $H_s(k)$ и называется **симплициальной гомотопической категорией**.

Сейчас мы определим *мотивную нестабильную категорию пучков симплициальных множеств* $H(k) = H^{\mathbb{A}^1}(k)$.

Определение 1.4. Если $\mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ — пучки симплициальных множеств, то $S(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})_n = \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{opp}}\,\mathrm{Shv}(\mathrm{Sm})}(\mathcal{Y} \times \Delta^n, \mathcal{Z})$. Мы получили функтор $[n] \mapsto S(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})_n$ из категории Δ^{opp} в категорию множеств. Будем обозначать его через $S(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ и называть **пространством морфизмов** (или **симплициальным множеством морфизмов**). В частности, если $U \in \mathrm{Sm}/k$, и $\mathcal{Y}$ — постоянный симплициальный пучок $[r] \mapsto U$, то $S(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = \mathcal{Z}(U)$.

Определение 1.5 (3.2.1 в [MV])**.** Симплициальный пучок $\mathcal{X}$ на Sm называется **$\mathbb{A}^1$-локальным**, если для любого симплициального пучка $\mathcal{Y}$ отображение

$$\mathrm{Hom}_{H_s(k)}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \to \mathrm{Hom}_{H_s(k)}(\mathcal{Y} \times \mathbb{A}^1, \mathcal{X}),$$

индуцированное проекцией $\mathcal{Y} \times \mathbb{A}^1 \to \mathcal{Y}$, биективно. В частности, можно подставить в качестве $\mathcal{Y}$ постоянный пучок, построенный по U, и получим требование, что $\mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U, \mathbb{A}^1)$ биективно.

Определение 1.6. Морфизм $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется **$\mathbb{A}^1$-эквивалентностью**, если для любого $\mathbb{A}^1$-локального $\mathcal{Z}$, являющегося симплициально фибрантным, отображение симплициальных множеств $f^*\colon S(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \to S(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ — слабая эквивалентность.

Определение 1.7. Морфизм симплициальных пучков $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется **$\mathbb{A}^1$-расслоением**, если он обладает свойством right lifting property по отношению к корасслоениям, которые одновременно являются $\mathbb{A}^1$-эквивалентностями.

Теорема 1.8 (раздел 2.3 в [MV])**.** Классы мономорфизмов, $\mathbb{A}^1$-эквивалентностей, $\mathbb{A}^1$-расслоений задают на $\Delta^{\mathrm{opp}}\,\mathrm{Shv}(k)$ структуру модельной категории.

Определение 1.9. Соответствующая гомотопическая категория обозначается через $H(k)$ или $H^{\mathbb{A}^1}(k)$. Она называется **мотивной гомотопической категорией** категории $\Delta^{\mathrm{opp}}\,\mathrm{Shv}(k)$.

Пусть $(\mathrm{Ex}, \theta\colon \mathrm{id} \to \mathrm{Ex})$ — функтор симплициальной резольвенты для симплициальной модельной структуры (эндофунктор Ex заменяет $\mathcal{X}$ на фибрантный объект функториальным образом). Определим $\mathrm{Ex}_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = \mathrm{Ex} \circ (\mathrm{Ex} \circ \mathrm{Sing})^{\mathbb{N}} \circ \mathrm{Ex}(\mathcal{X})$.

Теорема 1.10. Для любого $\mathcal{X}$ симплициальный пучок $\mathrm{Ex}_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ является $\mathbb{A}^1$-фибрантным.

2 Мотивная теорема Сигала

Для $m \geq 1$ обозначим $T^m = \mathbb{A}^m/(\mathbb{A}^m - 0) = T^{\wedge m}$, где $T = \mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1 - 0)$.

Теорема 2.1 (Предварительная формулировка, Garkusha–Panin)**.** Пусть k — бесконечное совершенное поле, $m > 0$. Тогда естественный морфизм

$$C_*(\Omega^\infty_{\mathbb{R}} \Sigma^\infty_T (T^m)) \to \Omega^\infty_{\mathbb{P}^1,\mathrm{mot}} \Sigma^\infty_T (T^m)$$

является слабой эквивалентностью на ростках (то есть, изоморфизмом в $H_s(k)$). Здесь

$$\Omega^\infty_{\mathbb{P}^1,\mathrm{mot}} \Sigma^\infty_T (T^m) = \operatorname{hocolim} \Omega^n_{\mathbb{P}^1} [C_*(\Omega^\infty_{\mathbb{P}^1} \Sigma^\infty_T (T^{m+n}))_f],$$

а f — симплициальная фибрантная замена.

На самом деле, в левой части стоит $\mathrm{Fr}(\Delta^\bullet \times -, T^m)$.

Следствие 2.2. Для любого поля $K \supseteq k$

$$\mathrm{Fr}(\Delta^\bullet_K, T^m) \to (\Omega^\infty_{\mathbb{P}^1,\mathrm{mot}} \Sigma^\infty_T (T^m))(K)$$

является слабой эквивалентностью симплициальных множеств.

Следствие 2.3. $\pi_i(\Delta^\bullet_{\mathbb{C}}, T^m) = \pi_i(S^{2m})$.

Дело в том, что $|\mathrm{Fr}(\Delta^\bullet_{\mathbb{C}}, T^m)| \to \Omega^\infty \Sigma^\infty (S^{2m})$ — слабая эквивалентность топологических пространств.

Пусть $(\mathcal{Y}, y)$ — пучок с отмеченной точкой. Определим $\Omega_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{Y}, y) = \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), (\mathcal{Y}, y)) \in \mathrm{Shv}$ и $\Sigma_T(\mathcal{Y}, y) = (\mathcal{Y}, y) \wedge T$. Далее, положим $\Omega^n_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{Y}, y) = \Omega_{(\mathbb{P})^1)^{\wedge n}}(\mathcal{Y}, y) = \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1)^{\wedge n}, (\mathcal{Y}, y))$. Построим цепочку

$$\Omega^n_{\mathbb{P}^1}\Sigma^n_T(\mathcal{X}, x) \hookrightarrow \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^1}\Sigma^{n+1}_T(\mathcal{X}, x) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \bigcup_{n \geq 0} \Omega^n_{\mathbb{P}^1}\Sigma^n_T(\mathcal{X}, x).$$

Откуда она берется? Достаточно построить морфизм

$$(\mathcal{Y}, y) \to \Omega_{\mathbb{P}^1}(\Sigma_T(\mathcal{Y}, y)) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{P}^1, \Sigma_T(\mathcal{Y}, y)).$$

Это равносильно заданию морфизма $\Sigma_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{Y}, y) \to \Sigma_T(\mathcal{Y}, y)$, то есть, морфизма $(\mathcal{Y}, y) \wedge \mathbb{P}^1 \to (\mathcal{Y}, y) \wedge T$. Для этого возьмем морфизм $\mathrm{id} \wedge \sigma$, где $\sigma = \overline{\mathrm{id}} \colon (\mathbb{P}^1, \infty) \to \mathbb{P}^1/(\mathbb{P}^1 - 0) = \mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1 - 0) = T$.

Рассмотрим $\mathbb{P}^1$-спектр

$$Q(T^m) = (\Omega^\infty_{\mathbb{P}^1}, \Sigma^\infty_T(T^m), \Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}\Sigma^\infty_T(T^{m+1})), \Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}\Sigma^\infty_T(T^{m+2})), \ldots$$

Какие в нем связующие отображения? Вот такие:

$$\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}\Sigma^\infty_T(T^m) \wedge \mathbb{P}^1 \Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}\Sigma^\infty_T(T^m \wedge T).$$

Но задание такого морфизма равносильно (по сопряженности) заданию морфизма

$$\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}\Sigma^\infty_T(T^m) \to \Omega_{\mathbb{P}^1}(\Omega^\infty_{\mathbb{P}^1}\Sigma^\infty_T(T^m \wedge T)),$$

а в качестве такого морфизма можно просто взять тождественный — слева и справа стоит одно и то же.

В топологии аналогом этого является Ω_{S^2}-спектр, построенный по $\mathcal{X}$ (в нашем случае по S^{2m}).

Теперь еще и навесим Δ, а именно, рассмотрим

$$Q^\Delta(T^m) = (C_*(\Omega^\infty_{\mathbb{P}^1}\Sigma^\infty_T(T^m)), C_*(\Omega^\infty_{\mathbb{P}^1}\Sigma^\infty_T(T^{m+1})), \ldots)$$

Эти объекты еще не симплициально фибрантные.

Лемма 2.4. Для любого $\mathbb{P}^1$-спектра можно взять функториальную замену, которая на каждом уровне заменит пространства на симплициально фибрантные.

Получим

$$Q^\Delta_f(T^m) = (C_*(\Omega^\infty_{\mathbb{P}^1}\Sigma^\infty_T(T^m))_f, C_*(\Omega^\infty_{\mathbb{P}^1}\Sigma^\infty_T(T^{m+1}))_f, \ldots)$$

вместе с морфизмом спектров $Q^\Delta(T^m) \to Q^\Delta_f(T^m)$.

Рассмотрим $\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(T^m)$ — $\mathbb{P}^1$-надстроечный спектр для T^m. Имеется очевидный морфизм $\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(T^m) \to Q(T^m)$, ииндуцированный вложением T^m в $\Omega^\infty_{\mathbb{P}^1}\Sigma^\infty_T(T^m)$. Композицией с морфизмом $Q(T^m) \to Q^\Delta(T^m)$ получаем морфизм

$$\theta \colon \Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(T^m) \to Q^\Delta(T^m),$$

а потом и морфизм

$$\theta_f \colon \Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(T^m) \to Q^\Delta_f(T^m),$$

Теорема 2.5. Пусть k — бесконечное совершенное поле, $m > 0$. Тогда

1. отображение $\theta \colon \Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(T^m) \to Q^\Delta(T^m)$ — стабильная мотивная эквивалентность $\mathbb{P}^1$-спектров;

2. $\mathbb{P}^1$-спектр $Q_f^\Delta(T^m)$ мотивно фибрантен, то есть, для любого $n \geq 0$ каждое пространство $C_*(\Omega_{\mathbb{P}^1}^\infty \Sigma_T^\infty(T^{m+n}))_f$ является $\mathbb{A}^1$-локальным, и структурный морфизм

$$C_*(\Omega_{\mathbb{P}^1}^\infty \Sigma_T^\infty(T^{m+n}))_f \to \Omega_{\mathbb{P}^1}(C_*(\Omega_{\mathbb{P}^1}^\infty \Sigma_T^\infty(T^{m+n+1}))_f)$$

является section-wise слабой эквивалентностью (то есть, это слабая эквивалентность на любом $U \in \mathrm{Sm}/k$);

3. морфизм $\theta_f \colon \Sigma_{\mathbb{P}^1}^\infty(T^m) \to Q_f^\Delta(T^m)$ — это стабильная мотивная фибрантная замена $\mathbb{P}^1$-надстроечного спектра $\Sigma_{\mathbb{P}^1}^\infty(T^m)$.

В следующий раз мы поймем, почему $\Omega_{\mathbb{P}^1}^\infty \Sigma_T^\infty(T^m) = \mathrm{Fr}(-, T^m)$ и $C_*(\Omega_{\mathbb{P}^1}^\infty \Sigma_T^\infty(T^m)) = \mathrm{Fr}(\Delta^\bullet \times -, T^m)$.

Список литературы

[MV] Morel, Voevodsky, $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes.