13.09.2012

В. Петров

$\mathbb{G}_m$-действия

$$\mathbb{G}_m(R) = R^\times$$

$$\mathbb{G}_m = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

- $\mathbb{G}_m$ действует на модуле $V \Longleftrightarrow V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$

$$\mathbb{Z} = \operatorname{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{G}_m \ \forall v \in V \quad t \cdot v = t^i v$$

обычное умножение

- $\mathbb{G}_m$ действует на гладкой алгебраической группе G

$$L = \{ g \in G \mid t \cdot g = g \ \forall t \in \mathbb{G}_m \} = G^{\mathbb{G}_m}$$

точнее, $\forall S$ ...

$$P = \{ g \in G \mid \lim_{t \to 0} t \cdot g \text{ существует} \}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_m &\longrightarrow G \\ t &\longmapsto t \cdot g \end{aligned}$$

Когда его можно продолжить до $\mathbb{A}^1 \longrightarrow G$?

$$P^- = \{ g \in G \mid \lim_{t \to \infty} t \cdot g \text{ существует} \}$$

Тогда можно доказать, что

L, P, P^- — гладкие замкнутые подгруппы

$L = P \cap P^-$

$$\begin{aligned} P &\longrightarrow L \\ g &\longmapsto \lim_{t \to 0} t \cdot g \end{aligned}$$ — гомоморфизм групп, U — его ядро

$$\begin{aligned} P^- &\longrightarrow L \\ g &\longmapsto \lim_{t \to \infty} t \cdot g \end{aligned}$$ — тоже гомоморфизм, U^- — его ядро

$U^- \cdot L \cdot U$ — открытая подсхема в G

Примеры • $G = SL_2$, t действует сопряжением элементом $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & tb \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & tb \\ t^{-1}c & d \end{pmatrix}$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\}, \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\}, \quad \begin{aligned} P &\longrightarrow L \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \end{aligned}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

• $G = SL_{p+q}$, t действует $\left(\begin{array}{c|c} t\cdot 1_p & 0 \\ \hline 0 & 1_q \end{array}\right)$

Ответ такой же, только матрицы блочные

• $G = SL_3$, t действует $\begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Тогда $L = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$, $P = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Любая параболическая в редуктивной группе так получается

G — изотропна $\Longleftrightarrow$ на ней существует нетривиальное действие $\mathbb{G}_m$

Действие $\mathbb{G}_m$ $\Leftrightarrow$ отображение $\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ Здесь G редуктивна

$\Leftrightarrow$ отображение $\mathbb{G}_m \longrightarrow G/_{\mathrm{Cent}(G)}$, поскольку $\mathbb{G}_m$ связна

$\Leftrightarrow$ в $G/_{\mathrm{Cent}(G)}$ есть подгруппа типа $\mathbb{G}_m$.

$G/_{\mathrm{Cent}(G)}$ действует на проективном гладком X

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{G}_m$ действует на X

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Бялыницки–Бируля) Тогда на X есть фильтрация замкнутыми подмногообразиями $X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset X_{n+1} = \emptyset$

т.ч. $X_i \supset X_{i+1}$, Y_i — неприводимые компоненты $X^{\mathbb{G}_m}$

$$\begin{tikzcd} X_i \setminus X_{i+1} \arrow[d] & x \arrow[d, mapsto] & \arrow[d, "\mathbb{A}^{r_i}"] \\ Y_i & \lim\limits_{t\to 0} t\cdot x & Y_i \arrow[u, dotted, bend left] \end{tikzcd}$$

$\mathbb{A}^{r_i}$ — аффинное расслоение с выделенным сечением (они автоматически гладкие)

(В частности, отсюда следует, что $M(X) = \oplus M(Y_i)\{r_i\}$

$\boxed{\text{Пример}}$ $t \cdot [x_0 : x_1 : x_2] = [x_0 : x_1 : t x_2]$ — действие $\mathbb{G}_m$ на $\mathbb{P}^2$

Неподвижные точки: ① $x_2 = 0$ $[x_0 : x_1 : 0]$ $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$

② $x_0 = x_1 = 0$ $[0:0:1]$ $pt \subset \mathbb{P}^2$

$$\lim [x_0 : x_1 : t x_2] = \begin{cases} [x_0 : x_1 : 0], & \text{если } x_0 \neq 0 \text{ или } x_1 \neq 0 \\ [0:0:1], & \text{если } x_0 = x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathbb{P}^2 \arrow[d, "\mathbb{A}^1"] & \supset & pt \\ \mathbb{P}^1 & & \end{tikzcd}$$

Если заменить t на t^{-1}, получается двойственная фильтрация

$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \mathbb{P}^2 \supset \mathbb{P}^1 \\ \big\downarrow \mathbb{A}^1 \\ pt \end{array}$$

Для простоты считаем, что G — присоединенная, т.е. $\mathrm{Cent}(G)=1$

$\rightsquigarrow \mathbb{G}_m \leq G \rightsquigarrow \mathbb{G}_m$ действует на $\mathrm{Lie}\, G$

$$\mathrm{Lie}\, G = \underbrace{\mathrm{Lie}\, U^-}_{\substack{\text{компоненты} \\ \text{степеней } \leq -1}} \oplus \underbrace{\mathrm{Lie}\, L}_{\substack{\text{компонента} \\ \text{степени } 0}} \oplus \underbrace{\mathrm{Lie}\, U^+}_{\substack{\text{компоненты} \\ \text{степеней } \geq 1}}$$

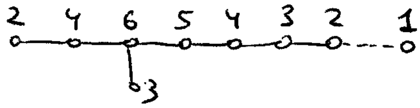
$\rightsquigarrow$ структура градуированной алгебры Ли

Как посчитать количество этих компонент?

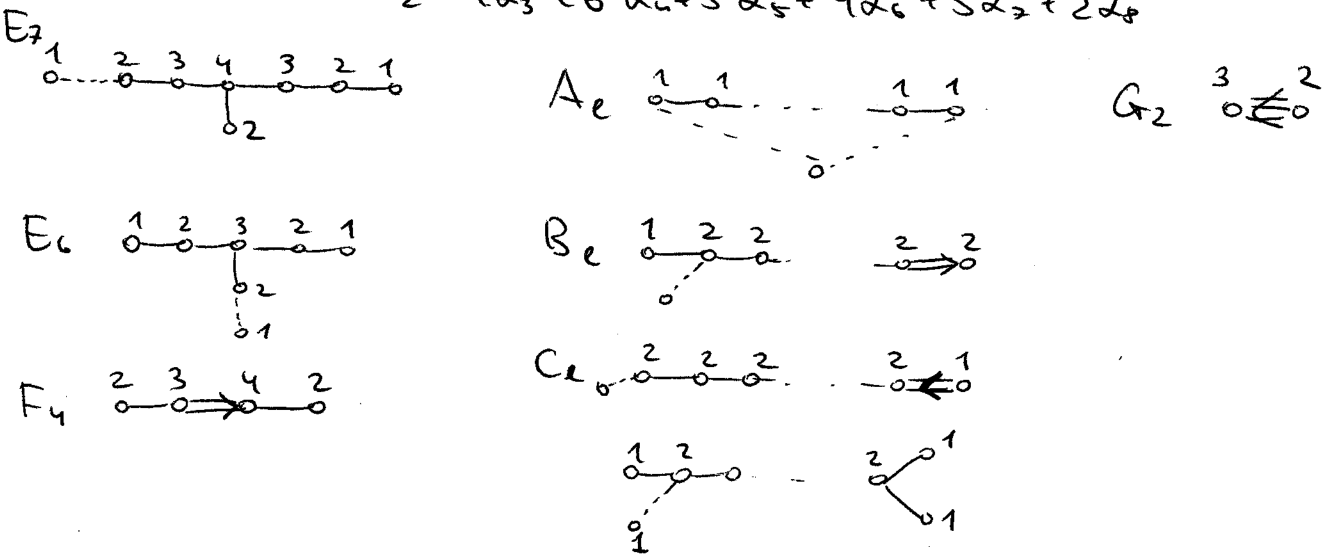
Параболической подгруппе отвечает $J \subset D$ — диагр. Дынкина

$$\sum_{i \in J} m_i(\widehat{\alpha}) = \text{количество компонент}$$

(если выкинуть J, остается диаграмма Дынкина для L)

E_8  Удвоенное значение в вершине $= \sum$ значений соседних

$$\widehat{\alpha} = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8$$



Интересуемся случаями, когда есть только одна компонента

$\iff \mathrm{Lie}\, U$ абелев $\iff U$ абелев $\iff$ J состоит из одного элемента, и при нем стоит 1.

Пусть $2 \in R^*$

$$\mathrm{Lie}\, G = \underset{\substack{\| \\ V^-}}{\mathrm{Lie}\, U^-} \oplus \mathrm{Lie}\, L \oplus \underset{\substack{\| \\ V^+}}{\mathrm{Lie}\, U^+}$$

$[[V^-,V^+],V^-] \longrightarrow V^-$ Всю алгебру Ли можно восстановить

$[[V^+,V^-],V^+] \longrightarrow V^+$ по этим трилинейным операциям.

Из тождества Якоби следует, что они удовлетворяют каким-то аксиомам

$\rightsquigarrow (V^-,V^+)$ — йорданова пара

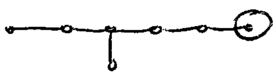
Простая йорданова пара — та, у которой нет нетривиального фактора

Простые йордановы пары $\longleftrightarrow$ простые алг. группы вместе с P и U, где U — абелев (тогда $L = \mathrm{Aut}((V^-,V^+))^\circ$)

Классификация ~~Изучение~~ всех простых групп сводится к классификации анизотропных групп.

Иногда по ~~[illegible]~~простой (анизотропной) группе H удается построить изотропную G такую, что $H = L/\mathrm{Cent}(L)$

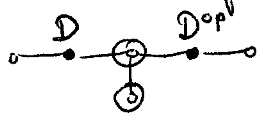
<u>Пример</u> Анизотропная группа типа E_6 с тривиальной алгеброй Титса ($\exists$ неприводимое 27-мерное представление) вкладывается в E_7:



(и наоборот, вкладывается $\Rightarrow$ алг. Титса тривиальна)

Аналогичные утверждения можно сформулировать для всех „картинок"

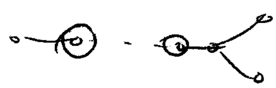
Условие: сумма алгебр Титса соседей ~~[illegible]~~ любой обведенной вершины равна 0.



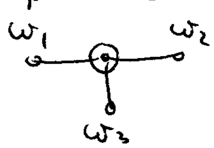
(D — тело степени 3)

$SL_1(D)\times SL_1(D^{op})/\dots$ вкладывается в изотропную E_6.

т. е. для картинки



условие на H, чтобы она могла быть анизотропным ядром состоит в том, что



$$[(\mathrm{End}\,V(\omega_1))_\gamma]+[(\mathrm{End}\,V(\omega_2))_\gamma]+[(\mathrm{End}\,V(\omega_3))_\gamma]=0 \text{ в } Br(R)$$

<u>Обобщения:</u>

① $G_m\times\dots\times G_m =: T$

тогда $V=\bigoplus_{\chi\in X^*(T)} V_\chi$ $\quad V_\chi\neq 0 \rightsquigarrow \chi$ — вес V

В случае $V = \mathrm{Lie}\,G$ χ — <u>корень</u>

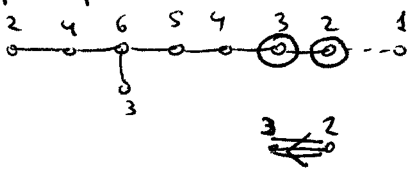
Если T — макс. тор в расщепимой группе, то это обычные корни или 0

В общем случае это называется <u>относительные корни</u>

Они не обязательно образуют систему корней

Если R — локальное кольцо, T — максимальный среди расщепимых, то это система корней (или BC_ℓ)

Например:



→ относительная система корней G_2

V_χ — одномерные для длинных, 27-мерные для коротких

$[V_\alpha, V_\beta] \le V_{\alpha+\beta}$, $[[V_\alpha, V_{-\alpha}], V_\alpha] \le V_\alpha$

На (V_χ) возникает структура „йорданова типа" — набор билинейных и трилинейных операций

(2) Вместо $\mathbb{G}_m$ можно рассмотреть μ_n

Даже в анизотропных группах часто встречается нецентральное μ_n

$\boxed{\text{Пример}}$ $O(q)$ $\quad \mathbb{G}_m \le O(q) \Leftrightarrow q$ изотропна (отщепляется $\mathbb{H}$)

G_2 μ_2 $\quad \mu_2$ водится всегда! Достаточно взять любое отражение.

$F_4\,(E_6)$ μ_3

E_7 μ_4

E_8 μ_5

(3) Вместо $\mathbb{G}_m$ можно рассмотреть одномерный нерасщепимый тор:

S/R — квадратичное расширение (этальное)

$R_{S/R}(\mathbb{G}_m)^{(1)} = \{s \in S \mid N(s) = 1\}$

неформально

т.е. вместо гиперболы берется окружность

Например, $\mathbb{C}/\mathbb{R}$; $R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_m)^{(1)}$-модуль на V

$=$ <u>структура Ходжа</u> на V

В анизотропных группах часто водится такая штука

октонионы:

$\alpha, \beta, \gamma \qquad \underset{1}{F} \longrightarrow \underset{2}{F(\sqrt{\alpha})} \longrightarrow \underset{4}{\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)} \longrightarrow \underset{8}{\langle\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle\rangle}$ — аналог т. Лагранжа