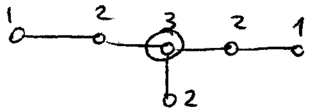
27.09.2012

В. Петров

G_m-градуировки на алгебре Ли — было в прошлый раз

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-градуировка: можно взять $\mathbb{Z}$-градуировку по модулю n

Такая градуировка может существовать над базой даже когда G_m-градуировки нет



$\rightsquigarrow$ G_m-градуировка с компонентами от -3 до 3

$$L = \underbrace{L_{-3}\oplus L_{-2}\oplus L_{-1}}_{\text{тоже нильпот.}} \oplus L_0 \oplus \underbrace{L_1\oplus L_2\oplus L_3}_{\text{нильпотентная алгебра Ли}}$$

L_0: алгебра Ли подгруппы Леви (редуктивная) — $A_2+A_2+A_1$

Общая идея: берем G_m-градуировку с компонентами от $-n$ до n, и берем ее по модулю n

$L_0 \rightsquigarrow L_0\oplus L_3\oplus L_{-3}$ — тоже редуктивная; тип читается из расширенной диаграммы Дынкина: $A_2+A_2+A_2$

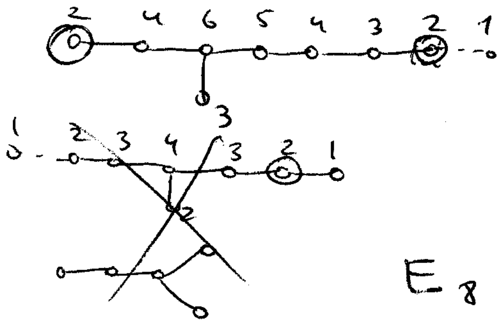
Статья Elduque про finite gradings

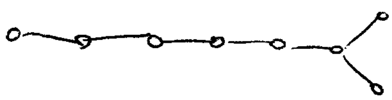
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\dots$ — итерируем процесс

Например, на E_8 есть $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$-градуировка

31 ненулевой элемент

Все пространства данной однор. степени имеют размерность 8





E_8	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$	$248=(2^5-1)\cdot 8$	
	$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$	$248=(5^3-1)\cdot 2$	
E_6, F_4	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$	$78=(3^3-1)$	$52=(3^3-1)\cdot 2$
G_2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$	$14=(2^3-1)\cdot 2$	

SL_p $\quad (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \qquad p^2-1=(p^2-1)\cdot 1$

$$\begin{pmatrix} & & & 1\\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}=x \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \zeta & & \\ & & \zeta^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \zeta^{p-1}\end{pmatrix}=y \qquad \begin{matrix} x^p=y^p=1 \\ xy=\zeta yx \end{matrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} & & & 1\\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \zeta & & \\ & & \ddots & \\ & & & \zeta^{p-1}\end{pmatrix}\right]$$ — коммутируют в PGL_p

$\langle x,y\rangle$ коммутирует с x и с y

И наоборот: если матрица коммутирует с x и с y, что она лежит в $\langle x,y\rangle$

$\underline{p=2}$:

$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&-b\\c&-d\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\-c&-d\end{bmatrix}$$ → либо $b=0, c=0$ либо $a=0, d=0$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&a\\d&c\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&d\\a&b\end{bmatrix}$$ → $a=d$ или $a=-d$ → ok

→ на алгебре Ли $\mathrm{Lie}\,PGL_2$

хотим нарисовать $(\mathbb{Z}/2)^2$-градуировку

$$yay^{-1}=-a$$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&0\\0&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&0\\0&d\end{bmatrix}$$

→ три компоненты: $\left\langle\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\rangle, \left\langle\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\rangle, \left\langle\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\rangle$

O_n — ортогональная группа

Берем v: $q(v)$ обратим

Отражение отн. v: $u \longmapsto u-\dfrac{\langle u,v\rangle}{q(v)}\cdot v$, $\quad \langle u,v\rangle = q(u+v)-q(u)-q(v)$

→ $\mu_2 \hookrightarrow O_n$

Централизатор — O_{n-1}: ортогональное дополнение к $\langle v\rangle$

что происходит для SL_3?

для D_n?