R — комм. кольцо, локальное регулярное, $K = \mathrm{Frac}(R)$

$\mathcal{F} : R\text{-alg} \longrightarrow \mathrm{Sets}_*$ — функтор

(1) Является ли ядро $\mathcal{F}(R) \longrightarrow \mathcal{F}(K)$ тривиальным? ~~...~~

(2) Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал высоты 1

$\rightsquigarrow R_{\mathfrak{p}}$ — кольцо дискретного нормирования

Для того, чтобы элемент $\mathcal{F}(K)$ пришел из $\mathcal{F}(R)$, он должен пропускаться через $\mathcal{F}(R_{\mathfrak{p}})$. Верно ли обратное?

$$\bigcap_{\mathfrak{p}} \mathrm{Im}(\mathcal{F}(R_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow \mathcal{F}(K)) = \mathrm{Im}(\mathcal{F}(R) \longrightarrow \mathcal{F}(K))$$

— если это так, говорят, что „для $\mathcal{F}$ выполнена чистота"

Нас интересует ситуация

$\mathcal{F} = H^1_{ét}(-, G)$, где G — редуктивная групповая схема над R

Например, $G = PGL_n$; тогда $H^1_{ét}(S, PGL_n)$ = алгебры Адзумайи степени n над S

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Гротендик) R-локальное регулярное кольцо. Тогда $H^1_{ét}(R, PGL_n) \longrightarrow H^1_{ét}(K, PGL_n)$ инъективно

$\Updownarrow$

то же самое: $Br(R) \longrightarrow Br(K)$ инъективно

$\boxed{\text{Гипотеза}}$ R, G как выше

ядро $H^1_{ét}(R, G) \longrightarrow H^1_{ét}(K, G)$ тривиально

$G = T$: Кольё-Телен, Сансюк (198?)

если $k \subset R$ и G определена над k, то (k — бесконечное поле)

Оянгурен, Кольё-Телен ($\approx$1989)

Панин, Вавилов, Ставрова: G простая, содержащая нецентральную $\mathbb{G}_m$

Панин, Петров, Ставрова: G — adjoint, strongly inner, типа E_6 или E_7

$H^1_{ét}(R, G) = \{ E \mid E - G\text{-торсор над } R \} \to$ тривиальность ядра означает:

E — G-торсор, $E(K) \neq \emptyset \Rightarrow E(R) \neq \emptyset$

Можно брать какие-то другие многообразия вместо торсоров

Проективные однородные G-многообразия: X

$X(R_{\mathfrak{p}}) = X(K)$ для проективного

(валюативный критерий собственности)

$$\left[\frac{a_0}{\pi^{n_0}} : \dots : \frac{a_k}{\pi^{n_k}}\right] = [a_0 : a_1\pi^{n_0-n_1} : \dots : a_k\pi^{n_0-n_k}]$$

$\mathbb{P}^k(K) \qquad \mathbb{P}^k(R_p)$ (если $n_0 = \max_i\{n_i\}$)

Пример:

q — квадратичная форма над R

— если $2 \in R^*$, то это $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$, $a_i \in R^\times$

⇝ $O(q)$ — линейные преобразования, сохраняющие q

→ $O(q)$ — редуктивная группа (несвязная)

$SO(q)$ — комп. связности = {специальные линейные ...}

$Q := \{q = 0\} \subset \mathbb{P}^{n-1}_R$ —

многообразие размерности $n-2$ (проективное, гладкое над R)

$\Updownarrow$

все $a_i \in R^\times$

$O(q)$, $SO(q)$ действуют на Q транзитивно

Замечание: Вполне может быть, что $Q(R) = \varnothing$

Наша гипотеза: $Q(K) \neq \varnothing \overset{?}{\Rightarrow} Q(R) \neq \varnothing$.

Что такое $\mathbb{P}^{n-1}_R(R) = \{[x_1 : \dots : x_n] \mid \sum R x_i = R\}/\sim$

для локального кольца

$k \subset R$ — беск. поле ⇝ $\boxed{\text{Теорема}}$ Для квадрик это верно: $Q(K) \neq \varnothing \Rightarrow Q(R) \neq \varnothing$

(Панин–Пименов)

$\boxed{\text{Задача}}$ Доказать такую же теорему для эрмитовых форм над кватернионами

H/R — алгебра Адзумайи степени 2

Над локальном кольцом это означает, что $H = \left(\frac{a, b}{R}\right)$; $a, b \in R^\times$

$= \langle x, y \mid x^2 = a, y^2 = b, xy = -yx \rangle$

~~Пусть на H есть какая-то инволюция~~

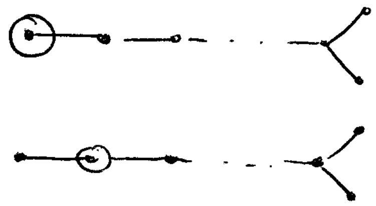
$\bar{\ }$: $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$ } симплектическая инволюция (каноническая)

относительно нее — антиэрмитовы формы:

$h(u,v) = \sum \bar{u}_i a_i v_i$, $\bar{a}_i = -a_i$

$U(h) = \{$лин. преобр., сохр $h\}$

$SU(h) = \{$спец. лин. —//—//— $\}$



Q

$\{h(u,u)=0\}$

$X = \{h(u,u)=0\}$

Вопрос тот же:

$X(K) \neq \varnothing \Rightarrow X(R) \neq \varnothing$

Иными словами:

G — групповая схема над R; простая, типа D_n

Над K G_K имеет параболическую подгруппу типа P_2

Верно ли, что у самой G есть подгруппа типа P_2?

---

q/K. Пусть $\exists L/K$ — нечетной степени, сепарабельное,

$Q^{\downarrow}$ такое, что $Q(L) \neq \varnothing$. Тогда $Q(K) \neq \varnothing$

— теорема Шпрингера

Нужно д-ть т. Шпрингера для эрмитовых форм (над полем!) методами общего положения

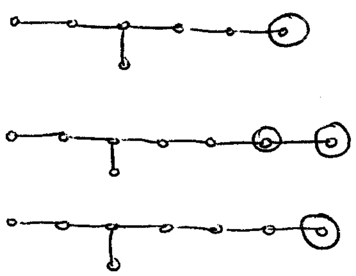
Тогда это будет и над локальным кольцом

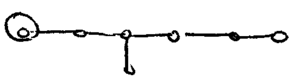
S/R — конечное этальное нечетной степени, R локально.

Та же задача, но теперь G — простая исключительная группа, X — однородное проективное; $X(K) \neq \varnothing \overset{?}{\Rightarrow} X(R) \neq \varnothing$.

В большей части ситуаций теорема доказана.

Есть неразобранные случаи:





+ алг. Титса произвольная — в этой ситуации появляется снова эрмитова форма над кватернионами (6-мерная), и опять нужна т. Спрингера