

Бирациональная геометрия

исключительных многообразий

Цель — по X, G посчитать $M(X)$ — мотив Чжоу

$$Y \hookrightarrow X \text{ — гладкие}$$



$$B_{Y/X} \rightarrow M(B_{Y/X}) \oplus M(Y)$$

$$Y \hookrightarrow X$$

$$M(X) \oplus \underbrace{M(\mathbb{P}^1 \times_{X/Y})}_{\text{нормальное расслоение}}$$

Если есть т. Крулля-Умидта, то
можно $M(Y)$ сократить

$$M(Y) \oplus M(Y) \{1\} \oplus \dots \oplus M(Y) \{\dim X - \dim Y - 1\}$$

(см. Fulton + Manin's identity principle)

"Sarkisov link"

X, Y — бирационально эквивалентны.

Можно ли их соединить элем. цепочкой?

Программа Саркизова: в классе "хороших" многообразий

$X \stackrel{\sim}{\sim} Y$ — бирац. эквивалентны $\Leftrightarrow X, Z$ соединены несколькими звеньями:
 $B_{Y/X} \cong B_{Y/X'}$

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ Y \subset X & & X' \supset Y' \end{array} \rightarrow X, X' \text{ соединены звеном Саркизова}$$

т.е. Транзитивное замыкание тогда = бирац. эквивалентности

$$X, Z \text{ — бирац. эквивалентны} \Rightarrow \mathcal{U}(X) \simeq \mathcal{U}(Z)$$

↑
верхние мотивы

Пример: подсчет мотива $\xi(F_4/P_4)$ по модулю 2

$\text{char } K \neq 2$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow F_4$$

$$f_3: H^1(K, F_4) \longrightarrow H^3(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$$f_5: H^1(K, F_4) \longrightarrow H^5(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

— известно, что они оба — символы, и f_5 делится на f_3

$$\text{т.е. } f_3 = \langle\langle a, b, c \rangle\rangle, f_5 = \langle\langle a, b, c, d, e \rangle\rangle$$

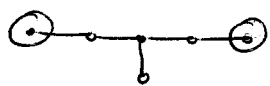
$$F_4 \xrightarrow{i} E_6$$

$$\xi F_4 \leq_{i_*(\xi)} E_6$$

мы будем писать просто ξ

Считаем, что у K нет расширений нечетной степени

$\rightarrow E_6$ — строю внутренняя и ~~внутренняя~~ изотропна с индексом T_{26}



(или вообще расселена)

$$F_4/P_4 \subseteq E_6/P_6 \subseteq \mathbb{P}^{26}$$

— как гиперплоское сечение

$\dim=15 \qquad \dim=16$



$$\xi(F_4/P_4) \subseteq \xi(E_6/P_6) \text{ как гиперплоское сечение}$$

↑ на нем действует G_m

Идея: нарисовать фибрацию на большом многообразии и пересечь его с маленьким

$$G_m \text{ задает градуировку } V(\omega_6) = \begin{matrix} K & U & V \\ 1 & \oplus 16 & \oplus 10 \\ \mathbb{P}^{26} & [\alpha : \beta : \gamma] \end{matrix}$$

$$E_6/P_6 \supset \{\alpha=0\} \supset \{\alpha=0, \beta=0\} \cong D_5/P_4$$

восстановить квадратичную

$\downarrow A^{16}$
 $pt = \{\beta=0, \gamma=0\}$

$\downarrow A^5$
 $\{\alpha=0, \gamma=0\} \cong D_5/P_5$ — «максимальный ортогональный градиент» (10-мерный)

$$E_6/P_6 \supset \{\gamma=0\} \supset \{\gamma=0, \beta=0\} = pt$$

$\downarrow A^8$
 $\{\beta=0, \alpha=0\} \cong D_5/P_4$

$\downarrow A^2$
 $\{\gamma=0, \alpha=0\} \cong D_5/P_5$

$$\mathbb{P}^{16} \cong \mathbb{P}(K \oplus U) \dashrightarrow E_6/P_6$$

$[\alpha : \beta]$
 $[\alpha : \beta]$

$\longleftarrow$
 $\longleftarrow$

$[\alpha : \beta : \gamma]$
 $[\alpha^2 : \alpha\beta : Q(\beta)]$

↑
не определено там, где $\alpha=0, Q(\beta)=0$, т.е. на D_5/P_5
задается десятью квадратичными уравнениями

В такой ситуации они связаны элементом Саричева:

$$B\ell_{D_5/P_1} E_6/P_6 \cong B\ell_{D_5/P_5} P^{16}$$

Все пересечения теперь с $\alpha + t(c) = 0$

$$\text{слева: } \alpha^2 + t(Q(\theta)) = 0$$

→ Упражнение Нарисовать пересечение сгильграфич (они уже могут пересекать быть аффинными)

$$E_6 \supset D_5$$

$$F_4 \supset B_4$$

$$D_5/P_5 \cong B_4/P_4$$

$$P_1 \leq D_5 \leq E_6$$

$$P_1 \leq B_4 \leq F_4$$

$$Q_{15} \leftarrow \alpha^2 + t(Q(\theta)) = 0 \rightarrow F_4/P_4$$

локус: B_4/P_4

локус: 7-мерная квадратика
 B_4/P_1

↓

$$B\ell_{B_4/P_4} Q_{15} = B\ell_{B_4/P_1} F_4/P_4$$

Морис: $\xi(F_4/P_4)$ бирационально изоморфно квадрике
(детальное вычисление см. у Мандональда)

$$\xi_5 = \langle a, b, c, d, e \rangle$$

фиксируем $e \leadsto$ квадратика $\langle a, b, c, d \rangle \perp \langle e \rangle$

или $\langle c, e \rangle$

это и есть Q_{15}

разные выборы парабол. подгруппы дают разные e внутри $\langle a, b, c, d, e \rangle$
все эти квадратика бирационально эквивалентны друг другу:

$$U(Q_{\langle a, b, c, d \rangle \perp \langle e \rangle}) = R_{\langle a, b, c, d, e \rangle}$$

→ вычислить потенциал

$$R_{\langle a, b, c, d, e \rangle} \oplus \text{сдвиги } R_{\langle a, b, c \rangle}$$

Хотим: E_7/P_7 (изотропная)

$$V(\omega_7) = K \oplus U \oplus V \oplus K$$

(1 27 27 1)
[$\alpha : x : y : \beta$]

$$E_7/P_7 \supset \{\alpha=0\} \supset \{\alpha=0, x=0\} \supset \{\alpha=0, x=0, y=0\} = p \neq$$

(dim=27) $\downarrow A^{27}$ $\{x=0, y=0, \beta=0\}$

$\downarrow A^{10}$ E_6/P_1
" $\{\alpha=0, y=0, \beta=0\}$

$\downarrow A^1$ E_6/P_6
" $\{\alpha=0, x=0, \beta=0\}$

Что такое малое гиперболическое сечение? $\{\alpha=\beta\}$

- это какое-то 26-мерное многообразие

= компактификация E_6/F_4

$$\{\alpha=\beta\} \supset \{\alpha=0\} \supset \begin{cases} \{\alpha=0, y=0\} = E_6/P_6 \\ \{\alpha=0, x=0\} = E_6/P_1 \end{cases}$$

$\downarrow$
 E_6/F_4

$\downarrow \text{dim}$
 $E_6/P_{1,6}$

или посчитать
модуль $\{\alpha=\beta\}$?

1) mod 3 (там модаль
 E_7 изотропна)

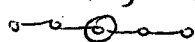
$\rightarrow \{\alpha=\beta\}$ -
нормальное много-
образие для
 $\{a, b, c, d\}/3$

2) mod 2, но внешняя
форма: $E_6 \subset E_7$

Надо вместо этого кривизну отображение

предыдущий случай:

A_5 вместо E_7



$\{\alpha=\beta\}$ - многообразие Меркурьева - Сусинна

= компактификация $SL_1(D)$ - тора

формы SL_3