25.10.2012

В. Петров

R — локальное регулярное кольцо, содержащее поле k (бесконечное)

$K = \mathrm{Frac}(R)$

$\xi \in H^1(R, G)$ G — простая исключительная группа (расщепимая)

X — G-однородное многообразие; $X = G/P$, P — параболическая

${}_\xi X$ — скрученная форма

Теорема (изотропности) Кроме нескольких исключений

$$\left(\begin{array}{ll} P = P_7, P_8, P_{7,8}, & G = E_8 \\ P = P_7, & G = E_7 \\ P = P_1, & G = E_7^{ad} \end{array}\right)$$

если ${}_\xi X$ имеет K-точку, то ${}_\xi X$ имеет R-точку.

Эта теорема следует из такой теоремы:

P — параболическая, L — подгруппа Леви

Теорема Предположим, что для $H^1(-, L)$ выполнено свойство чистоты:

(для $(\xi_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\text{-простой идеал высоты 1 в } R}$, $\xi_\mathfrak{p} \in H^1(R_\mathfrak{p}, L)$ т.ч. $(\xi_\mathfrak{p})_K$ не зависит от $\mathfrak{p}$

Тогда $\exists\, \xi \in H^1(R, L)$: $\xi_{R_\mathfrak{p}} = \xi_\mathfrak{p}$)

Тогда выполнено заключение предыдущей теоремы.

Док-во Пусть дан $\xi \in H^1(R, G)$

ξ_K: $\xi_K(G/P)$ имеет K-рациональную точку

то есть, $\xi_K G$ изотропна

(имеет параболическую подгруппу типа P)

$\rightsquigarrow \xi_K$ пришел из $\zeta_K \in H^1(K, L)$

Лемма (здесь R — любое кольцо) $H^1(R, L) \longrightarrow H^1(R, G)$ инъективно, и его образ состоит из таких ξ, что ${}_\xi G$ имеет параболическую подгруппу типа P

Док-во Леммы: $H^1(R, L) = H^1(R, P)$

(поскольку $H^1(R, U)$ тривиально; тут важна аффинность $\mathrm{Spec}\, R$)

Если $\zeta \in H^1(R, L) \rightsquigarrow {}_\zeta P$ — параболическая подгруппа в ${}_\zeta G$.

Обратно, если есть параболическая подгруппа P' в ${}_\xi G$
для $\xi \in H^1(R, G)$

Что такое коцикл? $\{U_i\}$ — покрытие $\operatorname{Spec} R$
и над каждым U_i фиксирован изоморфизм
$({}_\xi G)_{U_i} \cong G_{U_i}$ т.ч. на „пересечениях" $U_i \times_{\operatorname{Spec} R} U_j$
есть условие согласованности.
Эквивалентность — подправляем эти изоморфизмы на внутренние автоморфизмы G_{U_i}

Если ${}_\xi G$ содержит P', то можно подправить коцикл ξ так, чтобы P' переходила в P
(локально все параболические одного типа сопряжены)
После этого ξ сведется к коциклу из $H^1(R, \underset{\overset{\|}{P}}{N_G(P)})$

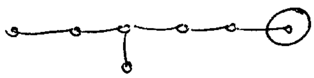
Такое же рассуждение доказывает инъективность. □

Продолжаем доказательство Теоремы.
Хотим показать, что ζ_K неразветвлен, то есть, приходит из R_p для каждого p
R_p — кольцо дискретного нормирования
${}_\xi(G/P)$ — полное многообразие
По валюативному критерию собственности
$$({}_\xi(G/P))(K) \neq \emptyset \Rightarrow ({}_\xi(G/P))(R_p) \neq \emptyset$$
$\rightsquigarrow$ ξ_{R_p} приходит из $\zeta_p \in H^1(R_p, L)$
$(\zeta_p)_K = \zeta_K$ по инъективности в Лемме
Пользуемся чистотой и получаем $\zeta \in H^1(R, L)$
такой, что $(\zeta)_K = \zeta_K$
$\rightsquigarrow$ ${}_\zeta(G/P)(R) \neq \emptyset$
Осталось доказать, что образ ζ в $H^1(R, G)$ совпадает с ξ

Теперь ссылаемся на теорему Панина–Вавилова–Ставровой:
Если $\xi, \zeta \in H^1(R, G)$: $\xi_K = \zeta_K$, и ${}_\zeta G$ изотропна, то $\xi = \zeta$
(точная формулировка: $H^1(R, {}_\zeta G) \longrightarrow H^1(K, {}_\zeta G)$ имеет тривиальное ядро)
+ сдвиг отмеченной точки

$\boxed{\text{Утв.}}$ $H^1(R, {}_\zeta G)$ и $H^1(R, G)$ равны.
$$* \longmapsto \zeta$$

Откуда берутся исключения?

 L – типа E_6

– нет чистоты

 L – типа D_6

$E_7^{sc} \rightsquigarrow D_6^{sc} \rightsquigarrow$ что-то, связанное с квадр. формами

– для них есть т. чистоты

$E_7^{ad} \rightsquigarrow D_6^{\text{half-spin}} \rightsquigarrow$ что-то, связанное с эрмитовыми формами над кватернионами

– чистоты пока нет.

Цель: доказать чистоту для E_6 и для эрм. форм над кватернионами