# Гипотеза Гротендика – Серра

01.11.2012

И. А. Панин

Пусть $R$ — локальное регулярное кольцо, $K$ — его поле частных

$G/R$ — редуктивная групповая схема

(или полупростая групповая схема, или простая односвязная, или простая присоединенная)

Например, существует расширение (этальное, конечное)

$$R \hookrightarrow \tilde{R} = R[t]/_{(f(t))}, \text{ где } \bar{f}(t) \in (R/_{\mathfrak{m}})[t]$$

— сепарабельный многочлен

такое, что $G \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} \tilde{R} \xrightarrow{\sim} G_0 \times \operatorname{Spec} R$,

где $G_0$ — расщепимая простая односвязная/присоединенная групповая схема над $\mathbb{Z}$

Гипотеза: $\operatorname{Ker}\left(H^1_{et}(R, G) \longrightarrow H^1_{et}(K, G)\right) = *$

$$GL_{2n, \mathbb{Z}[1/2]} \hookleftarrow SO_{2n, \mathbb{Z}[1/2]}$$

$$GL_{2n}(S) \hookleftarrow SO_{2n}(S) = \left\{ A \in GL_{2n}(S) \;\middle|\; A^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \det(A) = 1 \right\}$$

$$Sp_{2n}(S) = \left\{ A \in GL_{2n}(S) \;\middle|\; A^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{\text{Пример}}$ $a, b \in R^*$, $\frac{1}{2} \in R$

$$\mathbb{H} = \left(\frac{a, b}{R}\right) : \begin{cases} u^2 = a \\ v^2 = b \\ uv = -vu \end{cases}$$

— обобщенные кватернионы

$\cup$ $R^4$ с базисом $(1, u, v, uv)$

$$\operatorname{Nrd} : \left(\frac{a, b}{R}\right) \longrightarrow R$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 uv \longmapsto \alpha_0^2 - a\alpha_1^2 - b\alpha_2^2 + ab\alpha_3^2$$

$\rightsquigarrow$ возникает форма $x_0^2 - a x_1^2 - b x_2^2 + ab x_3^2$

Уравнение $x_0^2 - a x_1^2 - b x_2^2 + ab x_3^2 = 1$

задает подсхему $SL_{1, \mathbb{H}}$ в $\mathbb{A}^4_R$

$SL_{1, \mathbb{H}} \otimes_R \tilde{R} \cong SL_{2, \tilde{R}}$ — достаточно взять $R[t]/(t^2 - a) = \tilde{R}$

$$\mathbb{H} \otimes_R \tilde{R} \cong M_2(\tilde{R})$$

$$\operatorname{Nrd} \longleftrightarrow \det$$

аналогично, $\underbrace{GL_{1,\mathbb{H}}}\otimes_R \tilde{R} \cong GL_{2,\tilde{R}}$

$$\begin{tikzcd}
GL_{1,\mathbb{H}} \arrow[d, equal] & \\
\{\mathrm{Nrd} \neq 0\} \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted] & \mathbb{A}^4_R \arrow[d, "\mathrm{Nrd}"] \\
\mathbb{A}^1\setminus\{0\} \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^1
\end{tikzcd}$$

$$\{1\} \longrightarrow SL_{1,\mathbb{H}} \longrightarrow GL_{1,\mathbb{H}} \xrightarrow{\mathrm{Nrd}} \mathbb{G}_{m,R} \longrightarrow \{1\}$$

— можно рассматривать эту последовательность как последовательность пучков в эталькой топологии и она является короткой точной последовательностью пучков групп. $\rightsquigarrow$ есть точная последовательность множеств с отмеченными точками

$$1 \longrightarrow \underset{\{\xi\in\mathbb{H} \mid \mathrm{Nrd}(\xi)=1\}}{SL_1(\mathbb{H})} \longrightarrow \underset{\{\xi\in\mathbb{H} \mid \mathrm{Nrd}(\xi)\in R^*\}}{GL_1(\mathbb{H})} \longrightarrow R^* \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1_{et}(R, SL_{1,\mathbb{H}}) \longrightarrow H^1_{et}(R, GL_{1,\mathbb{H}}) = * \quad \longleftarrow \text{т. Гильберта 90}$$

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd}
R^*/\mathrm{Nrd}(\mathbb{H}^*) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d] & H^1_{et}(R, SL_{1,\mathbb{H}}) \arrow[d] \\
K^*/\mathrm{Nrd}(\mathbb{H}_K^*) \arrow[r, phantom, "\cong"] & H^1_{et}(K, SL_{1,\mathbb{H}_K})
\end{tikzcd}$$

желаем доказать, что Ker этой стрелки тривиально

$c \in R^*$ Пусть мы знаем, что $c \in \mathrm{Nrd}(\mathbb{H}_K^*)$

Это равносильно тому, что $c = \alpha_0^2 - a\alpha_1^2 - b\alpha_2^2 + ab\alpha_3^2$ для $\alpha_0,\dots,\alpha_3 \in K$

Желаем найти $\beta_0,\dots,\beta_3 \in R$ : $c = \beta_0^2 - a\beta_1^2 - b\beta_2^2 + ab\beta_3^2$

---

① Если $R$ содержит бесконечное поле и $G$ пришла с поля $K$ (постоянна), то Colliot-Thélène + Ojanguren '89 решили эту задачу

② Если $R \supset$ бесконечное поле, $G \supset \mathbb{G}_{m,R}$ и $G$ – простая, то Ставрова, Вавилов, Панин '2009 доказали это.

③ Класс. группы $G/R$ — Ojanguren, Панин — Суслин, Панин — Ojanguren, Зайнуллин.

④ $G$ постоянна, $R$ – лок. кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$, $X$ над $\mathbb{F}_q$ $\rightsquigarrow$ Габер

Открытые вопросы:

- $R = \mathcal{O}_{X,x}$ ; $X/\mathbb{F}_q$ , $G$ — постоянная классическая
- $A$ = гладкая над $\mathbb{Z}_{(p)}$ алгебра      $q \neq p \Rightarrow q \in \mathbb{Z}_{(p)}^*$

   $\Downarrow$
   конечно порожд.

   $m \trianglelefteq A$ — макс. идеал; $R = A_m$

   $G = G_{const}$ — классическая группа (квази-расщепимая)

   Доказать гипотезу Гротендика-Серра в этом случае.

---

$c \in \mathcal{O}_{X,x}^*$

Можно считать (уменьшая $X \ni x$), что $c \in k[X]^*$


$R = \mathcal{O}_{X,x}$

$\dim X = 1$

$a, b \in k^* \subset R^*$

$$\alpha_0^2 - a\alpha_1^2 - b\alpha_2^2 + ab\alpha_3^2 = c \text{ в } k[X]$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in k[X]$. Где у них полюса?

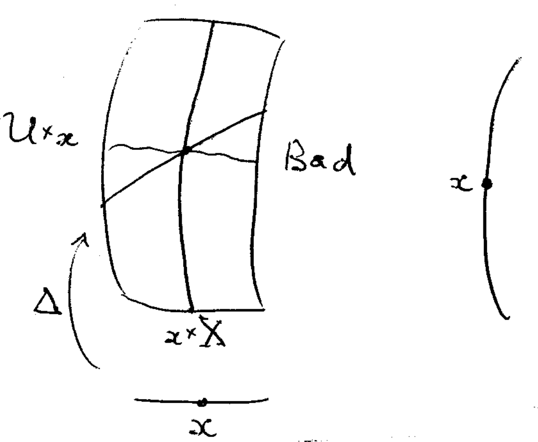
Если $x$ — не полюс, доказывать нечего

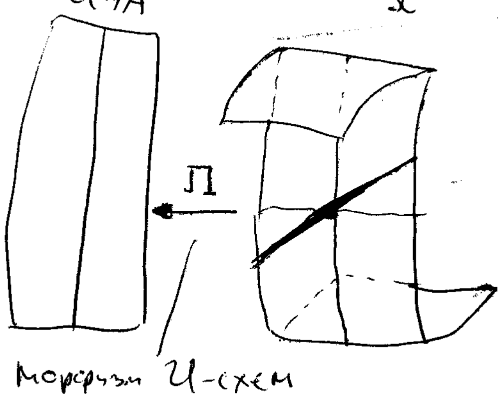

Уменьшая $X$, считаем, что $\alpha_i$ — регулярные функции на $X \setminus \{x\}$

$\bullet = \mathrm{Spec}(k)$

$x \in \mathcal{U} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$

$$\mathcal{U} \times X = \mathcal{X}$$




Построим проекцию общего положения $\Pi$:

① $\Pi$ конечен и сюръективен

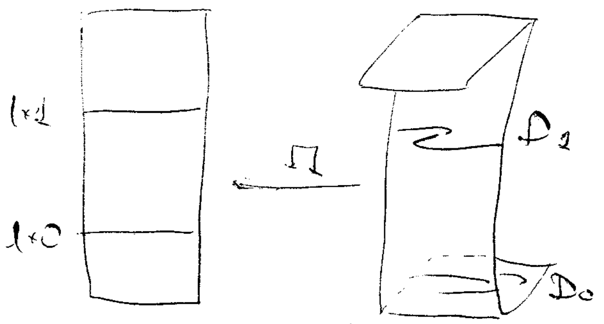
② $\Pi$ этален над $1 \times \mathcal{U}$

③ $\Pi$ этален вдоль $\Delta(\mathcal{U})$

(+) $D_1 = \Pi^{-1}(\mathcal{U} \times 1)$ : $D_1 \cap Bad = \emptyset$

(3) $\Rightarrow \Pi^{-1}(\mathcal{U} \times 0) = \Delta(\mathcal{U}) \sqcup D_0$

(+) $D_0 \cap Bad = \emptyset$




$$
\begin{tikzcd}
U\times 1 \arrow[d, hook, "i_1"'] & D_1 \arrow[l, "\Pi_1"'] \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, hook] & X-x \arrow[d, hook, "j"] \\
U\times \mathbb{A}^1 & \mathfrak{X} \arrow[l] \arrow[r, "p_X"] & X \\
U\times 0 \arrow[u, hook, "i_0"] & D_0 \amalg \Delta(U) \arrow[l, "\pi_0"'] \arrow[r, "f_0"] \arrow[r, bend right, "\text{каноническое вложение}"'] & X-x
\end{tikzcd}
$$

конечный сюръективный

≈id Многозначное отображение

$\Updownarrow$

h — многозначная гомотопия

Наш функтор $S \longmapsto S^*/\mathrm{Nrd}(\mathbb{H}_S^*)$

— гомотопически инвариантный предпучок с трансферами

Эвристика:

Mult — категория „многозначных отображений" ($\approx$ Corr)

$\mathrm{Ob}(\mathrm{Mult}/k) = \mathrm{Sm}/k$

$\mathrm{Mor}(Y, X) = \left\{ Y \xleftarrow{\pi} \tilde{Y} \xrightarrow{f} X \;\middle|\; \begin{array}{l}\pi \text{ — конечный сюръективный плоский} \\ f \text{ — любой}\end{array} \right\}$

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{Z}\times_Y \tilde{Y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, dashed, bend right] & \tilde{Y} \arrow[r] \arrow[d] & X \\
\tilde{Z} \arrow[r] \arrow[d] & Y & \\
Z & &
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{Mor}(Y, X)/_{„\sim"}$ — наивная гомотопность: $\varphi_1 \sim \varphi_0$ + транзитивное замыкание

$$
\begin{tikzcd}
Y\times 1 \arrow[d, hook] & ?_1 \arrow[l] \arrow[d, hook] \arrow[dr] & \\
Y\times \mathbb{A}^1 & ? \arrow[l, "\Pi"'] \arrow[r] & X \\
Y\times 0 \arrow[u, hook] & ?_0 \arrow[l] \arrow[u, hook] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$\varphi_1$, $\varphi_0$

Многозначные отображения можно складывать

$$
\begin{tikzcd}
 & \tilde{Y} \arrow[dl] & \\
Y & & X \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \tilde{\tilde{Y}} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
$$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Mor}(Y, X)$ — полугруппа, $\sim$ согласовано с суммой

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Mor}(Y, X)/_{„\sim"}$ — тоже полугруппа

Пусть $\widetilde{Mor}(Y,X) = Groth(Mor(Y,X))$

$\widetilde{Mor}(Y,X)/_{„\sim"} = Groth(Mor(Y,X)/_{„\sim"})$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\mathcal{F} : Mult/_k \longrightarrow ab$

гомотопически инвариантен $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ пропускается через $\widetilde{Mult}^{hom}$

(трансферы нужны, чтобы доопределить $\mathcal{F}$)

$\mathcal{F}(S) = S^*/Nrd\ (\mathbb{H}_S^*)$ — функтор с трансферами

Посмотрим на нашу диаграмму в категории $\widetilde{Mult}^{hom}$:

$j \circ (\Pi_1, f_1) = j \circ (\Pi_0, f_0) + can$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{c} (Y \xleftarrow{\pi} \tilde{Y} \xrightarrow{f} X) \\ \downarrow \\ \mathcal{F}(Y) \xleftarrow[(\pi, f)^*]{} \mathcal{F}(X) \end{array} \right)$$

$\rightsquigarrow (\Pi_1, f_1)^* (j^*(\overline{c})) = (\Pi_0, f_0)^* (j^*(\overline{c})) + can^*(\overline{c})$

— равенство в $\mathcal{O}^*_{X,x}/Nrd$

Утверждаем, что $j^*(\overline{c}) = 0$.

① естественно, из регулярности $\alpha$: на $X \setminus \{x\}$ это следует

$\rightsquigarrow can^*(\overline{c}) = 0$ в $\mathcal{O}^*_{X,x}/Nrd((\mathbb{H} \otimes_k \mathcal{O}_{X,x})^*)$