15.11.2012

И.А. Панин

Другой подход к гипотезе Гротендика — Серра
(совместно с А.К. Ставровой и Н.А. Вавиловым, май 2009)

Пусть R — локальное регулярное кольцо, содержащее бесконечное поле k,
G/R — редуктивная односвязная простая групповая схема
— т.е. $\exists$ конечное этальное $\tilde{R}/R$ т.ч. $G \otimes_R \tilde{R} \simeq G_{0,k} \otimes_k \tilde{R}$,
где $G_{0,k}$ — расщепимая односвязная простая алгруппа над k
— т.е. SL_n, $Spin_n$, Sp_{2n}, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8

Пусть $\mathcal{G}/R$ — <u>главное однородное G-расслоение</u>.
— то есть пара $(\mathcal{G}, G \times_U \mathcal{G} \xrightarrow{\mu} \mathcal{G}$ — действие$)$
т.ч.
а) $\mathcal{G}/U$ — строго плоская
в) $G \times_U \mathcal{G} \xrightarrow{(\mu, pr)} \mathcal{G} \times_U \mathcal{G}$ — изоморфизм схем

$$\begin{tikzcd} G \times_U \mathcal{G} \arrow[rr, "(\mu,pr)"] \arrow[dr] & & \mathcal{G} \times_U \mathcal{G} \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$U = \operatorname{Spec} R$

$$\begin{tikzcd} G \times \mathcal{G} \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr] & \\ \mathcal{G} \times_U \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d] \\ \mathcal{G} \arrow[r] & U \end{tikzcd}$$

— покрытие в плоской топологии

Например, для $k = \mathbb{C}$: $\forall u \in U$ есть изоморфизм

$$G(u) \times \mathcal{G}(u) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(u) \times \mathcal{G}(u)$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathcal{G}(u) \cong G(u) \text{ как } G(u)\text{-множество}$$

<u>Тривиальное</u> главное однородное G-расслоение:
пространство вида $(G, G \times_U G \xrightarrow{\mu} G)$ — точнее, изоморфное ему

<u>Морфизм</u> G-расслоений $\mathcal{G}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_2$
— это морфизм схем над U, согласованный с действием

Лемма Любой морфизм $\mathcal{G}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_2$ главных однородных G-расслоений является изоморфизмом.
(например, морфизм центральных простых алгебр одной размерности — изоморфизм)

Лемма $\mathcal{G} \cong G$ как главное однородное G-расслоение
$\Longleftrightarrow \exists\, s : U \to \mathcal{G}$ — сечение проекции $\mathcal{G} \to U$

Док-во „$\Rightarrow$" — очевидно; „$\Leftarrow$" — построим $G \to \mathcal{G}$
$g \mapsto g \cdot s$
— и любой изоморфизм так получается:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{G} \\ U \arrow[u, "e"] \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

— сечение

$\square$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть R, G, $\mathcal{G}$ — как выше. Пусть $G \supset \mathbb{G}_{m,R}$ (т.е. G изотропна над R), K — поле частных R. Если $\mathcal{G}_{\mathrm{Spec}(K)}$ тривиально, то оно тривиально над R.

Иначе говоря, если $\mathcal{G}(K)$ непусто, то и $\mathcal{G}(R)$ непусто.

Наша цель: набросать доказательство этой Теоремы.

(Габер доказал для многообразия $X/_{\mathbb{F}}$ над конечным полем и $R = \mathcal{O}_{X,x}$)

Две части: (1) Геометрическая (2) Арифметическая

(1) Пусть G, $\mathcal{G}$, $\mathcal{U}$ — как в Теореме, только $\mathcal{U} = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,x}$ $\mathcal{O}$

$x \in X$ — замкнутая точка
$X \in Sm/k$

Пусть $\mathcal{G}_K$ тривиально. Тогда существуют

a) главное однородное расслоение $\mathcal{G}_t$ над $\mathbb{A}^1_{\mathcal{U}}$

b) унитарный многочлен $h(t) \in \mathcal{O}[t]$

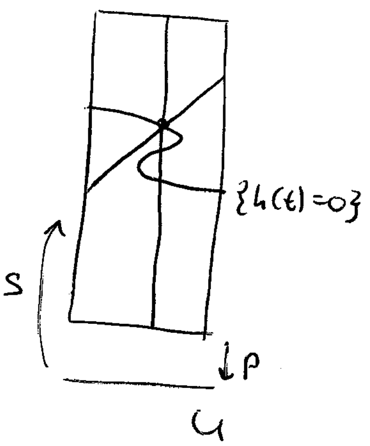
c) сечение $s : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathcal{U}}$

проекция $p : \mathbb{A}^1_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{U}$

такие, что

(i) $\mathcal{G}_t|_{(\mathbb{A}^1_{\mathcal{U}})_h}$ тривиально

(ii) $s^*(\mathcal{G}_t) = \mathcal{G}$



(2) Пусть P_t — главное однородное G-расслоение над $\mathbb{A}^1_{\mathcal{U}}$ и $h(t) \in \mathcal{O}[t]$ — унитарный такие, что выполнено (1); т.е., $P_t|_{(\mathbb{A}^1_{\mathcal{U}})_h}$ — тривиально. Если G — как в условиях Теоремы (простая, односвязная, изотропная), то P_t тривиально.

---

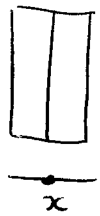
(1) + (2) $\Longrightarrow$ Теорема: возьмем $\mathcal{G}_t$ из (1) $\rightarrow$ по (2) $\mathcal{G}_t$ тривиально
$\Downarrow$ (ii)
$\mathcal{G}$ тривиально

Замечания

① Если G анизотропна (не является изотропной), то пункт (2) не ~~верно~~ верен: $\exists\, P_t$ над $\mathbb{A}^1_U$: $P_t|_{(\mathbb{A}^1_U)_h}$ тривиально, но P_t не тривиально:

$$U = \operatorname{Spec} \overbrace{\mathbb{R}[t]_{(t^2+1)}}^{u} = \mathcal{O}$$

$$G = G_{const} \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{R})} U$$



$$\mathbb{R}(x) = \mathbb{C}$$

$$G_{const} = SL_{1,\mathbb{H}} = \{x^2+y^2+z^2+t^2=1\}$$

$$\underline{\alpha,\beta \in \mathbb{H}^\times;\ [\alpha,\beta] \neq 1}$$

Пример Кнуса (Max Knus)

$$\mathbb{H}_{\mathcal{O}}[t]^2 \xrightarrow[\cdot(t\alpha)+((1-t)\beta)]{} \mathbb{H}_{\mathcal{O}}[t]$$

$\cap$ $\mathbb{H}[t]$ — сумма умножений на $t\alpha$ и на $(1-t)\beta$

1) это сюръекция

— достаточно проверить $\bmod (t-z_0)$ $\forall z_0 \in \mathbb{C}$

$\rightsquigarrow$ Ker — проективный модуль ранга 1 над $\mathbb{H}[t]$

Лемма $\operatorname{Ker} \not\cong \mathbb{H}[t]$ как $\mathbb{H}[t]$-модуль

$(\mathbb{H}_{\mathcal{O}} = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O})$

$\mathcal{G}(K) \neq \emptyset$

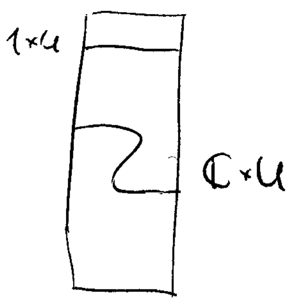
вырезая полюс этого сечения, получаем сечение на $X \setminus D$

Хочется сечение на U

аналитически такое есть: т. Ока

h-принцип Громова:

аналитические $\longleftrightarrow$ топологические для штейновых многообразий



$\mathcal{G}_t$ – главное G-расслоение

В топологии оно расширено с базы, поскольку $\mathbb{C}$ стягиваемо

$\rightarrow$ и аналитически тоже

оно вне змейки тривиально $\Rightarrow$ расширено с тривиального

$\Rightarrow$ само тривиально

В комплексном анализе ~~теорема верна~~ пункт (2) верен для любой редуктивной группы G

В частности, теорема тоже верна.

Переформулировка (теоремы):

$$\mathrm{Ker}\left(H^1_{et}(R, G) \longrightarrow H^1_{et}(K, G)\right) = *$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Федоров – Панин)

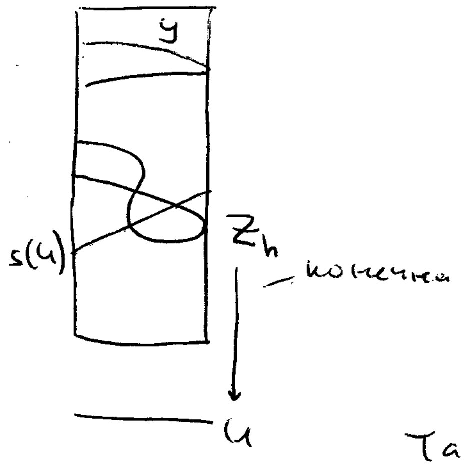
В условиях ~~теор~~ пункта (2) плана (но без предположения изотропности; G – односвязна и проста) существует $\forall Z$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\text{конечный этальный}"'] & \mathbb{A}^1_U \arrow[d] & Z_1 \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "\text{конечен}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

такой, что

(iii) $P_t|_{\mathbb{A}^1_U \setminus Y}$ – тривиально

(iv) $Y \cap (Z) = \varnothing$



Применение

$$Z := Z_h \cup s(U)$$

т.е. можно „поменять" замену $Z_h \longmapsto Y$ так, что она не пересекается с $s(U)$

Таких Y много: выбирая другие Y', получаем покрытие $\mathbb{A}^1_U$; т.е. наше расслоение локально тривиально.