

Нуль-циклы на плоскости Кэли

Мораль: X — однородное проективное;

если $X(K) \neq \emptyset$, то $X(K)$ рационально.

Может оказаться, что $X(K) = \emptyset$

Часто бывает, что

$(S^p X)(K) \neq \emptyset$; более того, R -тривиальна

Рассмотрим $\text{Ker}(CH_0(X) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}) =: \widetilde{CH}_0(X)$

Хочется доказать, что для некоторых X $\widetilde{CH}_0(X) = 0$

Считаем, что K имеет только расширения степени p^n для некоторого p .

Теорема Если ① некоторая $S^{p^n}(X)$ R -тривиальна, и
 ② $\forall L/K \ X(L) \neq \emptyset \Rightarrow X_L$ R -тривиально, то
 $\Rightarrow \widetilde{CH}_0(X) = 0$ (D. Krashinsky)

R -тривиальность: $X, K \quad x, y \in X(K)$

$x \sim y$, если $\exists f: \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X: f(0) = x, f(1) = y$

Транзитивное замыкание — R -эквивалентность

X называется R -тривиальным, если все K -рац. точки R -эквивалентны.

Узв. $\widetilde{CH}_0(SB(D)) = 0 \quad \text{ind}(D) = \deg D = p$

(из результата Панина следует, что $\forall$ ни в каком CH нет p -кручения)

Доказ-во:

$SB(D)$ — многообразие параболических подгрупп типа P_1

$S^p(SB(D))$ — т.е., задано p подгрупп типа P_1

Если они в общем положении, то их пересечение — макс. тор.

И наоборот, любой максимальный тор содержится ровно в p подгруппах типа P_1 .

$\{\text{макс. торы}\}$ — открытое подмножество в $S^p(SB(D))$

Это вложение соръективно на рациональных точках

(т.е., дополнение не имеет K -рациональных точек)

— т.е. D — тело.

Многообразие максимальных торов всегда унирационально
 $\rightarrow$ доказательство закончено.

Q - квадратича: $Q = \{ \langle v \rangle \mid q(v) = 0 \}$

рассмотрим $S^2 Q$

$$Q \times Q = \{ \langle u \rangle, \langle v \rangle \mid q(u) = q(v) = 0 \}$$

здесь есть открытое подмногообразие:
 $\{ q(u, v) \neq 0 \}$

$\rightarrow$ оно состоит из плоскостей | ограничение q на них невырождено.}

Пусть тип P^- равен типу P
 $\{ \text{подгруппы Леви} \} \rightarrow S^2(\xi(G/P))$

Если $\xi(G)$ анизотропна, то оно сюръективно на K -точках

$$P, Q \text{ - одного типа } \sim Q = P^- \Leftrightarrow R_u(Q \cap P) = \{1\}$$

Можно обобщить: L одного типа, а P другого

есть относительная группа Вейля

(типы) параболических подгрупп, содержащих $L \leftrightarrow$ подмножества на относительной диаграмме Дыкинна

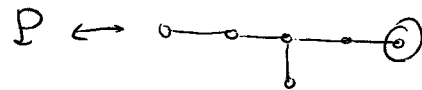
$L = \text{Cent}_G(S)$, S - расщепленный тор (не обязательно максимальный)

$$X^*(T) \rightarrow X^*(S) \text{ - проекция}$$

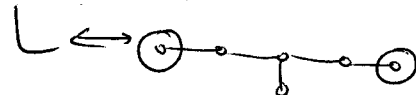
образ системы корней - относительная система корней.

$$\text{в примере выше } p = \frac{p!}{(p-1)!}$$

Теперь пусть $X = \xi(E_6/P_6)$



Относит. система корней - A_2



$\{L \text{ типа } P_{1,6}\}$ - открытое подмногообразие в $S^3(\xi(E_6/P_6))$

- если ξE_6 изотропна, это сюръективно на K -точках.

$$(3 = 3! / 2!)$$

$$\tilde{E}_6 / \underline{D_4 \rtimes S_3} \text{ - R-тривиальна?}$$

$$D_4 \rtimes S_3 \leq F_4$$

Поэтому рассматриваем по отдельности

$$\tilde{E}_6/F_4 \text{ и } F_4/D_4 \rtimes S_3$$

открытие/подмножество в $K^{27} \leadsto R$ -тривиально

многообразие кубических этальных подалгебр

в K^{27} (со структурой йордановой алгебры)

$\Rightarrow$ $\forall$ этальная в общем положении порождается одним элементом

$\leadsto$ это накрывается A^{27} , $\leadsto R$ -тривиально

$S^p X$

$\cup$

$\cap$

$\swarrow$ хочется описать их более явно.

Упражнение: описать $S^5(E_8/P_8)$ — надо рассмотреть
относ. к системе F_4 ?
(Черноусов — Меркурьев?)