20.12.2012

В. Петров

J — кубическая йорданова алгебра над полем F

- $1 \in J$
- $T: J \times J \longrightarrow F$ — билинейная симм. форма
- $\#: J \longrightarrow J$ — квадратичная операция
- $N: J \longrightarrow F$ — кубическая

$\boxed{\text{Пример}}$ A — центральная простая степени 3 $(M_3(F))$

$T(a,b) = Tr(a,b)$ $\qquad N(a) = \det(a)$

$\#$ — взаимная матрица $\qquad aa^\# = a^\# a = \det(a)\cdot 1$

$\boxed{\text{Пример}}$ C — алгебра Кэли $\quad (\dim = 1, 2, 4, 8)$

— composition algebra

- неассоц. произведение
- $1 \in C$
- $\bar{\ }$ — инволюция

Тогда на $H_3(\mathbb{C})$ есть структура кубической йорд. алгебры

$$\begin{pmatrix} F & C & C \\ \cdot & F & C \\ \cdot & \cdot & F \end{pmatrix}$$

N — „определитель" матрицы 3 на 3

$\dim H_3(C) = 3\,(1+\dim C)$

B — браунова алгебра

J — кубическая йорданова $\rightsquigarrow B = \begin{pmatrix} F & J \\ J & F \end{pmatrix}$

На B есть симплектическая форма b:

$$b\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & j_1 \\ j_1' & \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 & j_2 \\ j_2' & \beta_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \zeta\left(T(j_1, j_2') - T(j_2, j_1')\right)$$

$\dim C$	1	2	4	8	
$\dim J$	6	9	15	27	
$\dim B$	14	20	32	56	
$SO_3(C)$	A_1	A_2	C_3	F_4	— сохраняет все операции
$SL_3(C)$	A_2	A_2+A_2	A_5	E_6	— сохраняет норму $\Leftrightarrow$ сохраняет все операции в B
$Sp_6(C)$	C_3	A_5	B_6	E_7	— сохраняет b и 4-форму в B
$F_4(C)$	F_4	$^2E_6$	E_7	E_8	

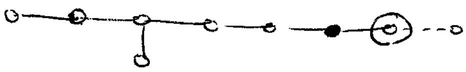
Многообразие прямых, натянутых на сингулярные элементы:

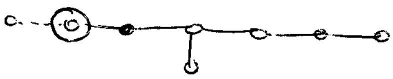
$$\begin{pmatrix} \alpha & j \\ j' & \beta \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} j^{\#} = \alpha j' \\ (j')^{\#} = \beta j \\ T(j,j') = 3\alpha\beta \\ \langle j, j' \rangle = 0 \end{array} \qquad \mathcal{Y} = \{ \langle u \rangle \mid u - \text{сингул.} \}$$

— если $\alpha \neq 0$, то $[\alpha : j : j' : \beta] = [1 : x : x^{\#} : N(x)]$

$\mathcal{Y}$: C_3/P_3 A_5/P_3 D_6/P_6 E_7/P_7.

$Sp_6(\mathbb{C})$ действует транзитивно на $\mathcal{Y}$





Какие орбиты у Sp_6 на $\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$?

есть такой инвариант: равно $b(u,v) = 0$ или нет?

$b(u,v) \neq 0$ — орбита

Допустим, что $b(u,v) = 0$.

Верно ли, что любой элемент $w \in \langle u, v \rangle$ тоже сингулярен?

не гладкое!

$$\begin{tikzcd}
\underset{\langle u \rangle}{\mathcal{Y}} \times \underset{\langle v \rangle}{\mathcal{Y}} \arrow[d, "pr_1"', "\mathbb{A}^{\dim \mathcal{Y}}"] & \supset & \{ b(u,v) = 0 \} \arrow[d, "\mathbb{A}^{2 + \dim C}"] & \supset & \{ \langle u,v \rangle \text{ сингулярно} \} \arrow[d, "\mathbb{A}^1"] & \supset & \{ \langle u \rangle = \langle v \rangle \} = \mathcal{Y} \\
\mathcal{Y} & & \mathcal{Y}' & & \mathcal{Y}'' = \{ \langle u \rangle \subseteq \langle u,v \rangle \} & &
\end{tikzcd}$$

+ все состоит из сингулярных эл-тов

$\mathcal{Y}' = \left\{ \begin{array}{l} \text{внутренние идеалы} \\ \text{максимальной размерности} \end{array} \right\}$

$\mathcal{Y}''$: $C_3/P_{2,3}$ $A_5/P_{2,3,4}$ $D_6/P_{4,6}$ $E_7/P_{6,7}$

$\mathcal{Y}'$: $C_3/P_{2,3}$ $A_5/P_{1,3,5}$ $D_6/P_{2,6}$ $E_7/P_{1,7}$

Skip Garibaldi, „Structurable algebras and..."

„Principles of duality and..."

X — гладкое гиперплоское сечение Y $\qquad \beta = \lambda\alpha$, $\alpha \in F^*$

На Y может не быть рац. точек

Для $Gr(3,6)$ $\cancel{X}$ — „многообразие Меркурьева–Суслина"

Вообще, $\cancel{X}$ — гладкая $SL_3(\mathbb{C})$-эквивариантная компактификация многообразия $\{N=\lambda\}$ — аффинное

$$
\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, phantom, "\supset"] & \{b(u,v)=0\} =: Z \arrow[d, "\{N=\lambda\}"'] \arrow[r, phantom, "\supset"] & X'' \arrow[d, "\mathbb{A}^1"] \\
& X & X'
\end{tikzcd}
$$

не аффинное!

не зависит от λ!

Но:

клеточное расслоение над X

(локально — произведение X на „клеточное")

$$
\begin{tikzcd}
X'' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y' \sqcup Y'' \arrow[d] \\
X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d] & \left\{\begin{array}{l}\text{замкнутое подмногообразие} \\ \text{в } Y' \times_Y Y'' \text{, заданное} \\ \text{отношением инцидентности}\end{array}\right\} \arrow[d] \\
X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}
$$

Что в этом хорошего? Часто X' — клеточное над общей точкой (поэтому его мотив раскладывается); X'' — тоже

$$CH_*(X'') \longrightarrow CH^*(Z) \longrightarrow CH^*(X') \longrightarrow 0$$

— последовательность локализации для Z

$$CH_*(Z) \longrightarrow CH^*(X \times X) \longrightarrow CH^*(X) \longrightarrow 0$$

хотим найти проекторы здесь:

Видимо, основная часть приходит из $CH^*(X')$ — а его мы „знаем"

На B есть инволюция $\to$ возникают ${}^2A_2$, $A_2 \times A_2$, ${}^2A_5$, ${}^2E_6$ — внешние группы

Мотивное разложение X во внешнем случае поможет разложить мотивы Y' и Y'' (и Y)