

Теорема жесткости Суслина

27.09.2012

И. Панин

$$K_i(F)$$

$$"H_i(GL_\infty(F))"$$

$$H_i(GL_\infty(F))$$

F -алгебраически замкнутое поле, $(\text{char}(F), n) = 1$

$$K_i(F)/_n K_i(F)$$

$$K_i(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, & i \text{ четно} \\ 0, & i \text{ нечетно} \end{cases}$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n \rightarrow 0$$

$$K_i(F) \xrightarrow{n} K_i(F) \rightarrow K_i(F, \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\partial} K_{i-1}(F) \rightarrow K_{i-1}(F)$$

$$\xrightarrow{\quad} K_i(F)/_n K_i(F)$$

$$\rightarrow _n K_{i-1}(F)$$

$$\sim K_2(F, \mathbb{Z}/n)$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$K_2(F)/_n = 0$$

$$\sim _n K_2(F) \xrightarrow{\quad} 0$$

$$\sim K_2(F) \text{ } n\text{-делима}$$

Кроме того,

$$K_3(F, \mathbb{Z}/n) \rightarrow _n K_2(F) \rightarrow 0$$

$$\downarrow$$

$$\sim _n K_2(F) = 0$$

$\Rightarrow$ эта группа однозначно делима.

$\Rightarrow K_{2i}(F)$ однозначно делима

$K_{2i+1}(F)$ содержит n -кручение $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

и фактор по нему однозначно делим

$$\bigotimes_{i=0}^{\infty} \mu_{\infty} \subset K_{2i+1}(F)$$

$$\underbrace{\mu_{\infty} \otimes \dots \otimes \mu_{\infty}}_{i \text{ раз}}$$

Иными словами
например, $Kil(C, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$$\xrightarrow{\sim} K_i^{top}(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

1984 Суслин

Теорема Пусть $k \subset K$ - включение алгебраически замкнутых полей
 $(n, \text{char}(k)) = 1$. Тогда $K_i(k) / {}_n K_i(k) \xrightarrow{\sim} K_i(K) / {}_n K_i(K)$

$$\text{и } {}_n K_i(k) \longrightarrow {}_n K_i(K)$$

Следовательно, ${}_n K_i(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow K_i(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$i=3$
 Основной инструмент: Трансферы .

X - гладкая аффинная кривая

$\tilde{X}$ - гладкая

$\downarrow \pi$ - конечный сюръективный морфизм т.е. $k[X] \hookrightarrow k[\tilde{X}]$
 - конечное целое расширение

$$\rightarrow K_0(k[\tilde{X}])$$

$$\downarrow$$

$$K_0(k[X])$$

($\forall$ проективный модуль над $k[\tilde{X}]$
 проективен как $k[X]$ -модуль)

$$\sim K_i(k[\tilde{X}])$$

$$\downarrow$$

$$K_i(k[X])$$

$$F = K_1, K_2$$

$$F \text{ - функтор, } F: k\text{-alg} \longrightarrow Ab$$

$$\downarrow$$

$$(Sch/k)^{op} \nearrow$$

Свойства:

① F гомологически инвариантен для k -гладких многообразий;
 т.е. $F(X) \xrightarrow[p_X]{\sim} F(X \times \mathbb{A}^1)$ $X \longleftarrow X \times \mathbb{A}^1$

② $\forall$ k -гладкого ~~многообразия~~ X (аффинного)

$$\text{и } \forall \tilde{X} \text{ - гладкое}$$

$$\downarrow$$

$$X$$

$$\uparrow$$

$$k[X]$$

$$\uparrow$$

$$k[\tilde{X}]$$

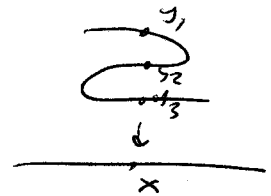
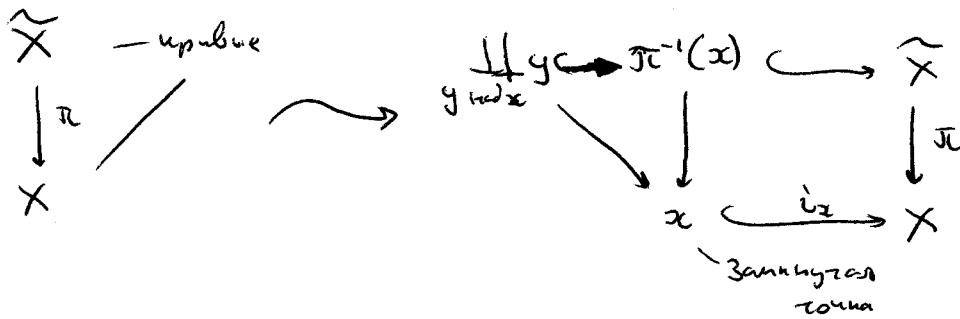
$$\uparrow$$

$$k[X]$$

задан гомоморфизм

такой, что

$$\text{Tr}_{\tilde{X}/X}: F(\tilde{X}) \longrightarrow F(X)$$



$$k[\pi^{-1}(x)] = k(x) \otimes_{k[X]} k[\tilde{X}]$$

$$\downarrow \leftarrow \text{сепарабельная, т.е. } k[\pi^{-1}(x)] = \prod_{y \in \pi^{-1}(x)} k(y)$$

Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{y/x} F(k) & \leftarrow & F(\coprod y) & \leftarrow & F(\tilde{X}) \\ & \searrow + & \downarrow \text{Tr} & \searrow \text{Tr} & \\ & & F(k) = F(x) & \leftarrow & F(x) \end{array}$$

должна быть коммутативна

Кроме того, $F \neq 0$: $n \cdot F = 0$,
т.е. $n \cdot F(X) = 0$

Теорема

Для такого функтора F

$$\forall k \hookrightarrow K \quad F(k) \longrightarrow F(K) \text{ — изоморфизм}$$

алг.з. поле

Мораль: Пусть $F: \text{Sch}/k \rightarrow \text{Ab}$ —

“аддитивный” предпучок с трансферами
гомотопически инвариантный на k -модельных многообразиях
и экспоненты n . Тогда $F(k) \xrightarrow{\sim} F(K)$
для любого алгебраического замыкания $K \supset k$.

Лемма (жесткости): В вышеуказанной ситуации $\forall$ алг.з. поле $K \supset k$

Пусть Y/k — аффинная кривая; y_1, y_2 — замкнутые точки на Y ,

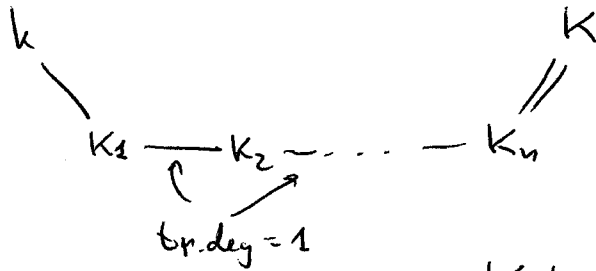
$$x_1^*, x_2^*: F(y_1) \longrightarrow F(y_2). \text{ Тогда } x_1^* = x_2^*$$

Выведен из этой леммы теорему.

$$k \subset K$$

индукция перед полем
конечной trdeg над k

→ можно считать, что K -конечные степени трансцендентности над k



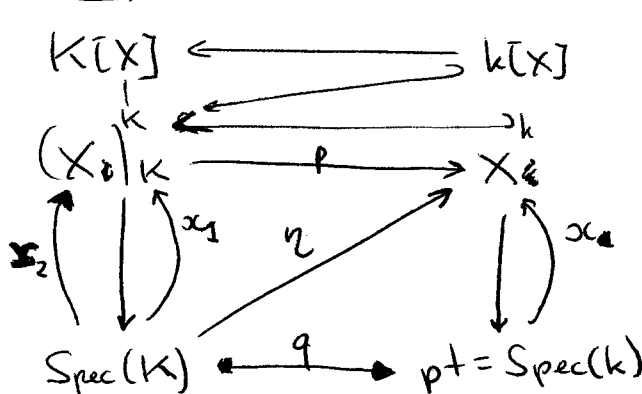
→ можно считать, что K/k - степени трансцендентности 1.

$$K \supset k[t] \leadsto K = \varinjlim A_i, \text{ где } A_i/k[t] \text{ квазилокальные,}$$

т.е. $A_i = (A_i')_{\mathfrak{p}}$, где $A_i'/k[t]$ конечное

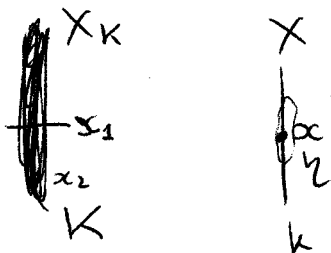
Можно считать, что A_i' - дедекиндово: $A_i' = k[X_i]$, где X_i - гладкая кривая

т.е. $K = \varinjlim k[X_i]$, где X_i - гладкие кривые



$X = X_i$ - афф. гладкая кривая

$\mathcal{O}_2$ получается из η
($\mathcal{O}_1$ получается из x)
Замкнутое точки



$$x_2^* = x_1^* : \mathcal{F}(X_K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(K)$$

по лемме жесткости

Докажем сюръективность отображения $\mathcal{F}(k) \longrightarrow \mathcal{F}(K)$

$d \in \mathcal{F}(K)$

$$\mathcal{F}(K) = \varinjlim_{i \in I} \mathcal{F}(k[X_i]) \leadsto \exists i \in I, d_i \in \mathcal{F}(k[X_i]) \text{ т.ч. } \eta^*(d_i) = d$$

$$d = \eta^*(d_i) = x_2^*(p^*(d_i)) = x_1^*(p^*(d_i)) = q^*(\underbrace{x^*(d_i)}_{\mathcal{F}(k)})$$

Теперь инъективность:

$$\begin{array}{ccc} F(k) & \longrightarrow & F(K) = \varinjlim_{i \in I} F(k[X_i]) \\ \beta & \longmapsto & \beta_K \end{array}$$

$$\beta_K = 0 \leadsto \exists i \in I : \beta_i = 0$$

Возьмем на X_i k -точку:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec} & & \\ & X_i & \\ & \downarrow f & \\ & \text{Spec}(k) & \end{array} \quad y - \text{3. точка}$$

$$\text{Тогда } f \circ y = \text{id}_{\text{Spec}(k)} \leadsto y^*(f^*(\beta)) = \beta$$

$$y^*(\beta_i) = 0$$

Теперь докажем лемму жесткости.

Y/K — аффинная ^{гладкая} кривая; $y_1, y_2 \in Y$

$\forall y \in Y$ есть гомоморфизм $F(Y) \xrightarrow{y^*} F(K)$

Рассмотрим $\bigoplus_{y \in Y} F(Y) \xrightarrow{\sum y^*} F(K)$

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{y \in Y} F(Y) & \xrightarrow{\sum y^*} & F(K) \\ \parallel & & \\ \left(\bigoplus_{y \in Y} \mathbb{Z} \right) \otimes F(Y) & & \\ \parallel & & \\ \text{Div}(Y) \otimes F(Y) & & \end{array}$$

(Серр, анзгруппы ч. п. м. классов)

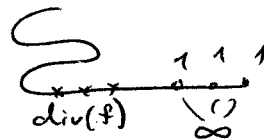
[Опр.] $Y \hookrightarrow \bar{Y}$ — гладкая проективная кривая, $Y_\infty = \bar{Y} \setminus Y$ — проецификация

(нормализация после Pic вложения $A^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$)

$\text{Pic}(\bar{Y}, Y_\infty) = \text{Div}(Y) / \sim$, где $\sim$ — "главные"

"главные": $f \in k(\bar{Y})$ т.ч. f определена (т.е. регулярна) в некоторой окр-сти $U \supset Y_\infty$; $u f|_{Y_\infty} \equiv 1$

$\text{Supp}(\text{div}(f)) \subset Y$; $\text{div}(f)$ — "главные"



Лемма

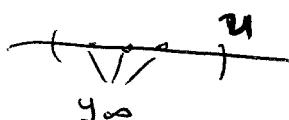
$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(\bar{Y}, Y_\infty) & \longrightarrow & \text{Pic}(\bar{Y}) \\ | & & \\ \text{Div}(Y) & \longrightarrow & \text{Div}(\bar{Y}) \end{array}$$

более тонкие
отн. экв-сти



$$k(Y)^* \rightarrow k[Y_\infty]^* \xrightarrow{\quad} \text{Pic}(\bar{Y}, Y_\infty) \longrightarrow \text{Pic}(\bar{Y}) \quad \text{— точная последовательность}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \downarrow & & \\ \bigoplus_{y \in Y_\infty} k^* & \xrightarrow{\quad} & k[Y_\infty]^* \end{array}$$



$$\leadsto \exists f \in k[U] : f|_{Y_\infty} = v$$

$$\leadsto \text{div}(f) \in \text{Pic}(\bar{Y}, Y_\infty)$$

Пример:

$$K^* \xrightarrow[\sim]{\text{id}} K \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}^1, \infty) \xrightarrow[\sim]{\quad} \text{Pic}(\mathbb{P}^1) \xrightarrow[\sim]{\quad} 0$$

$$K^* \xrightarrow{\Delta} K^* \times K^* \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}^1, 0 \amalg \infty) \xrightarrow[\sim]{\quad} \text{Pic}(\mathbb{P}^1) \rightarrow 0$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $0 \rightarrow K^* \xleftarrow{\text{pr}} K^* \times K^*$

$1 \cdot [1] \xleftarrow{\quad} 1 \cdot [1] \xrightarrow[\sim]{\quad} \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{c} \infty \\ | \\ x \quad [x] \mapsto x \in K^* \\ | \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Div}(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \end{array} \rightarrow K^*$$

$$\text{Pic}(\bar{Y}, y_\infty) \xrightarrow{\quad} \text{Pic}(\bar{Y})$$

$\searrow \text{deg} \quad \searrow \text{deg}$
 $\mathbb{Z}$

$$K^* \rightarrow K[y_\infty]^* \rightarrow \text{Pic}(\bar{Y}, y_\infty) \rightarrow \text{Pic}(\bar{Y})$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $C_m^* \times \dots \times C_m^* \rightarrow Y(\bar{Y}, y_\infty) \xrightarrow[\sim]{\text{дивизоры степени } 0} Y(\bar{Y})$

$\swarrow \quad \searrow$
 $(C_m^* \times \dots \times C_m^*) / C_m \xleftarrow{\quad} Y(\bar{Y})$

$\swarrow \quad \searrow$
 $\text{якобиан Розенлихта} \quad \text{расширение обычного якобиана}$

$\swarrow \quad \searrow$
 $\text{нормальный тор} \quad \text{при помощи тора}$

Все это работает над незамкнутым полем (появляются суръективные торы)

Следствие В частности,

- ① группа $Y(\bar{Y}, y_\infty) = n$ -делит $\text{Pic}(\bar{Y}, y_\infty)$
- ② $\text{Pic}(\bar{Y}, y_\infty) / n \xrightarrow[\sim]{\quad} \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$

$$\textcircled{3} \forall y_1, y_2 \in Y \quad [y_1] = [y_2] \text{ в } \text{Pic}(\bar{Y}, y_\infty)$$

Лемма (Key)

$$\text{Div}(Y) \otimes \mathcal{F}(Y) \xrightarrow{\quad} \mathcal{F}(K)$$

$\searrow$
 $\text{Pic}(\bar{Y}, y_\infty) \otimes \mathcal{F}(Y)$

пропускается через
отн. экв-стн

Поверим в Key Lemma $\rightarrow$
 $\mathbb{F}$ удваивается умножением на u

$$\sim \underbrace{\text{Pic}(\bar{Y}, Y_\infty) / \sim_{\text{Pic}(-)}}_{\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{F}(Y) \longrightarrow \mathbb{F}(K)$$

$$\sim \text{Div}_Y(Y) \otimes \mathbb{F}(Y) \longrightarrow \mathbb{F}(K)$$

$\begin{matrix} [y_1] & [y_2] \\ \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{F}(Y) \end{matrix}$

$$\sim y_1^* = y_2^* : \mathbb{F}(Y) \longrightarrow \mathbb{F}(K)$$

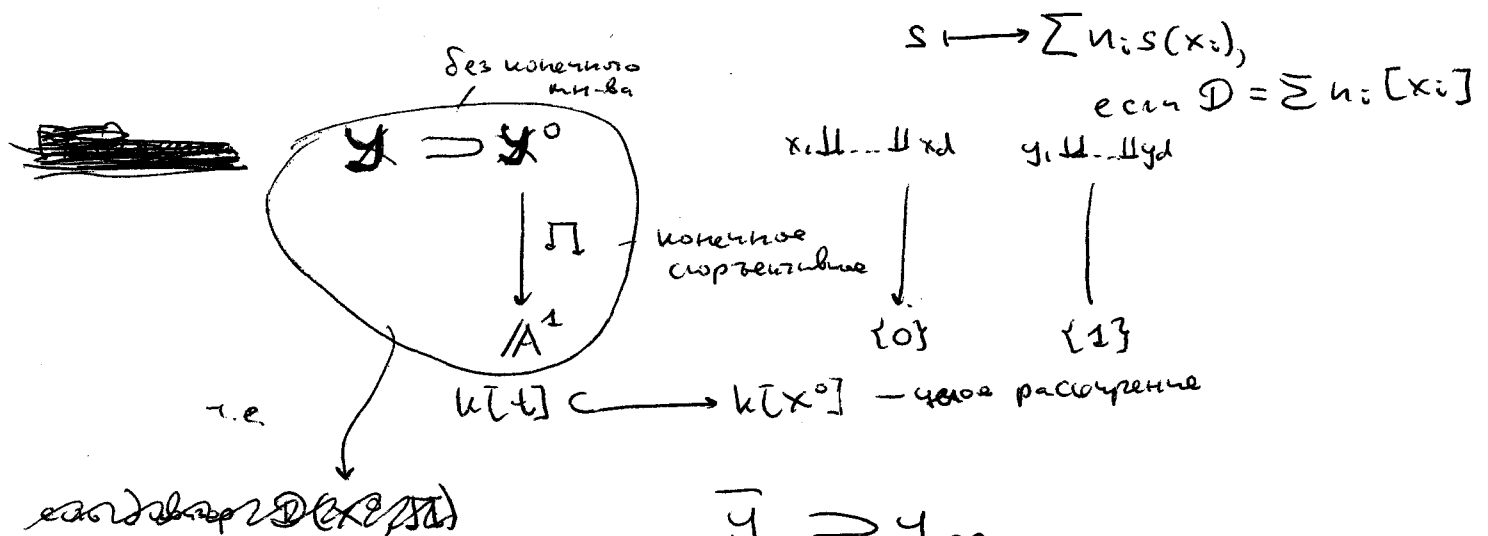
т.е. $[y_1] - [y_2]$ — дивизор степени 0
 $\uparrow$
 $\text{Pic}^\circ(\bar{Y}, Y_\infty)$

$$\sim [y_1] - [y_2] = n \cdot [\cancel{D}] + \text{div}(\cancel{f})$$

$\uparrow$ no Key Lemma

Доказательство ключевой леммы

$$\textcircled{D} \text{ „главный дивизор“ } \xrightarrow{?} [D]^* : \mathbb{F}(Y) \longrightarrow \mathbb{F}(K) \text{ — равен } 0$$

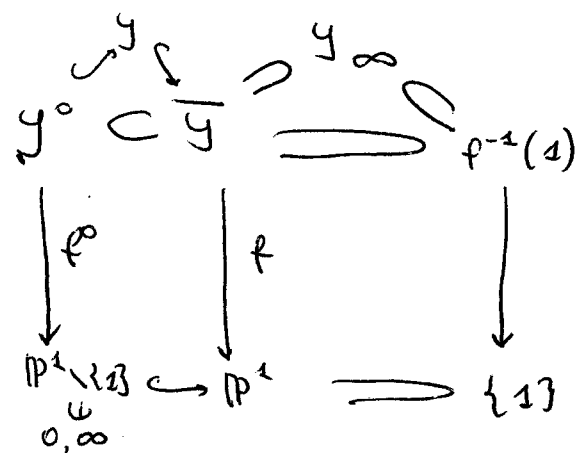


$$\bar{Y} \supset Y_\infty$$

$\downarrow f$ — разрывная, определена на д.ч.ст. Y_∞ , $Y_\infty \mapsto 1$

$$\mathbb{P}^1 \supset \{1\}$$

$$\sim f^{-1}(1) \supset Y_\infty$$



$$y^0 \cap y_\infty = \emptyset$$

$$\downarrow$$

$$y^0 \subset y$$

$$D = \text{div}(f) = [f^{-1}(0)] - [f^{-1}(\infty)]$$

Подлемма Группа "главных дивизоров" порождается такими дивизорами $\text{div}(f)$, что

f неразветвлена как над 0, так и над ∞

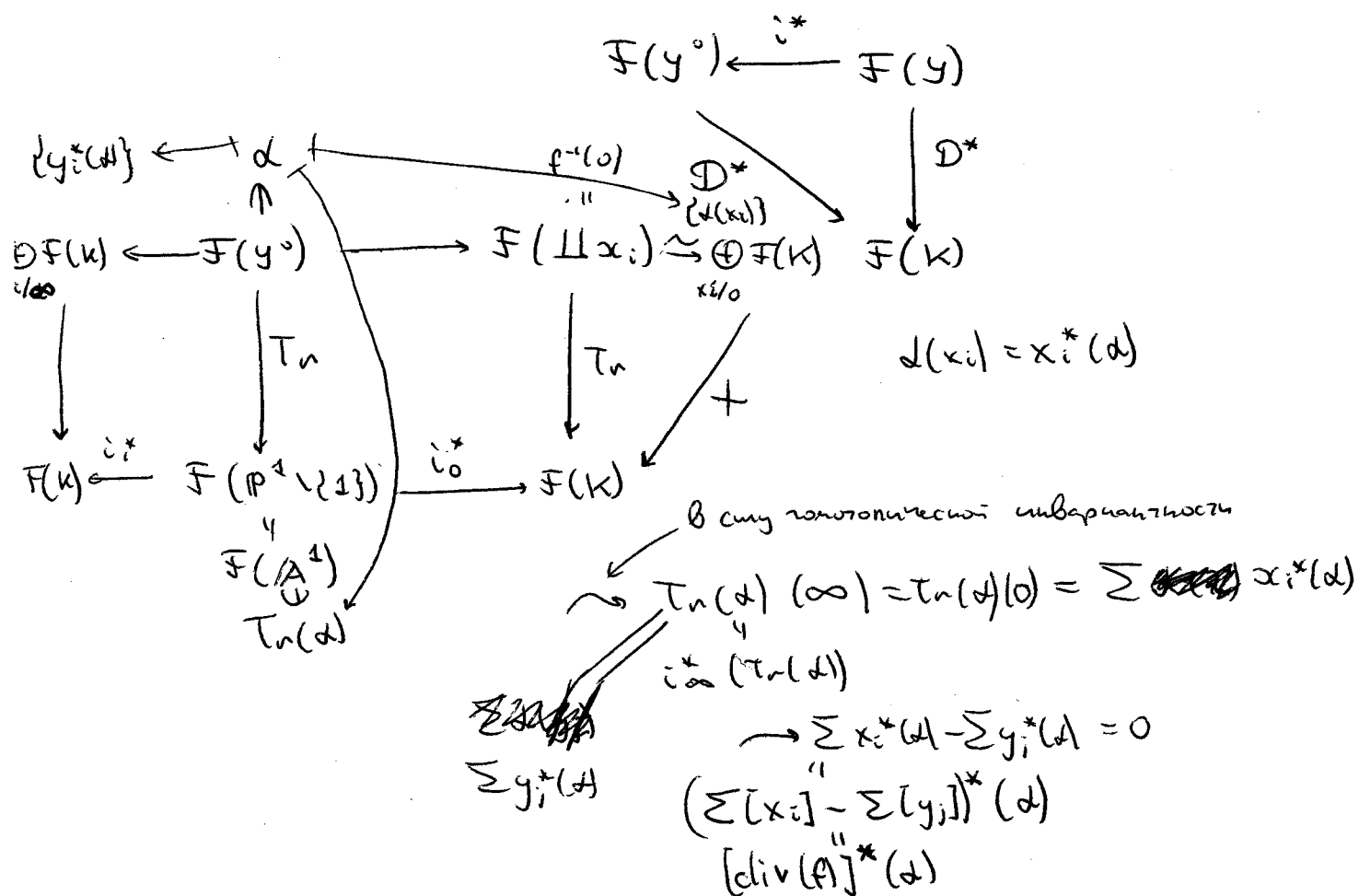
Это следствие "общего положения" // следствие теоремы Бертини

Следствие из подлеммы:

Достаточно доказать, что для таких D $[D]^* = 0$

f проэктивен, квивалентный $\leadsto$ конечный $\leadsto f_0^0$ конечный

D содержится в y^0



$$\begin{array}{ccc}
 \overline{\alpha} & & \\
 K[y_1, \dots, y_n] \xrightarrow{\cong K \times \dots \times K} \tilde{X} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{X} \\
 \downarrow & & \downarrow \pi \\
 K(x) & \xrightarrow{\quad} & X \\
 \parallel & & \\
 K & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 K[\tilde{X}] \\
 \bigcup_{\text{quasi-}} \\
 K[X]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \alpha \circledast \\
 K[\tilde{X}]^x \\
 \downarrow N: \alpha \mapsto \det(\alpha) \\
 K[X]^x
 \end{array}$$

$$\det(\tilde{\alpha}) = \overline{\det(\alpha)}$$

i.e. $N(\alpha|_{y_{\dots}}) = N(\alpha)|_x$

$$\tilde{\alpha} \sim \begin{pmatrix} \alpha(y_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha(y_n) \end{pmatrix} \sim \det(\tilde{\alpha}) = \prod \alpha(y_i)$$

$$\sim N(\alpha)(x) = \prod \alpha(y_i)$$

$X = \mathbb{A}^1$ — осталось рассмотреть

$$\sim K[\mathbb{A}^1]^x = K^x \sim N(\alpha) = \text{const}$$

$$\sim N(\alpha)(0) = \prod \alpha(y_i)$$

$$\parallel \\
 N(\alpha)(1) = \prod \alpha(x_j)$$

— закон зависимости

Видно, что гомотопическая инвариантность + трансфер — хорошее свойство