

Suslin - Voevodsky, Singular homology of abstract alg. varieties (Inv. Math, 1994?)

Воеводский определил категорию $DM^-(k)$, k - совершенное поле
транспонированная категория мотивов

$$Sm/k \xrightarrow{M} DM^-(k) \quad \text{— функтор}$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$X \longleftarrow M(X) \quad \text{с разумными свойствами}$$

хочется:

$$\text{Hom}_{DM^-(k)}(M(pt), M(X)[i])$$

$$\parallel$$

$$H_{Nis}^i(\text{Spec } k, M(X)) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{мотивный} \\ \text{комплекс} \sim \\ \text{гиперкохомологии} \end{array}$$

Более того,

$$H_{Nis}^i(Y, A) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{DM^-(k)}(M(Y), A[i])$$

$$\uparrow \quad \quad \uparrow$$

$$Sm \quad DM^-(k)$$

$$H_{Nis}^i(\text{Spec } k, A) = \text{Hom}_{DM^-(k)}(M(pt), A[i])$$

Как вычислять левую часть?

$$A \longrightarrow I^\bullet \xleftarrow{I^{\bullet-1} \rightarrow I^\bullet} \dots \quad \leftarrow \text{инъективы}$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \swarrow \text{квазиизоморфизм на } Sm_{Nis}(k) \Rightarrow \text{квазиизоморфизм посылки}$$

$$H^i(\Gamma(\text{Spec}(k), I^\bullet)) =: H_{Nis}^i(\text{Spec } k, A)$$

$$\uparrow \quad \quad \quad \nwarrow \text{точка в топологии Нисневича}$$

$$\quad \quad \quad \nwarrow \text{т.е. формальный объект в } Nis(\text{Spec}(k))$$

$$\Gamma(\text{Spec}(k), A) \xrightarrow{\quad \quad \quad} \text{квазиизоморфизм}$$

$$\Rightarrow H^i(\Gamma(\text{Spec}(k), I^\bullet)) = H^i(\Gamma(\text{Spec}(k), A))$$

Что за комплекс $M(X)$?

Это комплекс пучков на Sm_{Nis}/k :

пусть $\Delta^n := \{\sum x_i = 1\} \subset A_k^{n+1}$; есть вложения $\Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$
границы

$\Delta^\bullet$ — мультипликативный объект в Sm_k

Опр. Если $F: Sm/k^{op} \longrightarrow Ab$, то

$$\Delta^n(F)(U) = F(\Delta^n \times U) (= \text{Hom}(\Delta^n, F))$$

$\Rightarrow \Delta^\bullet(F) =: F_{\bullet}$ — предпучок

Возникает подозрение, что $\text{Cor}(-, X)$ представим
"многообразиями" $S^\infty(X)$

$$\text{Cor}_d(-, X) \longleftarrow S^d(X)$$

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \downarrow \\ \{(y, \{z\}) \mid y \in Z\} \subset X \times S^d(X) \\ \downarrow \\ (y, \{z\}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} U \times_{S^d(X)} \Gamma & \longrightarrow & \Gamma \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & S^d(X) \end{array}$$

Например, $S^d(\text{Spec } k[Y]) = \text{Spec}((k[Y]^{\otimes d})^{S_d})$

$$\text{Cor}_d(-, X) \longleftarrow S^d(X)$$

Фиксируем $x \in X$
(считаем $k = \mathbb{C}$)
на самом деле,
добавим x

$$\text{Cor}_{d+1}(-, X) \longleftarrow S^{d+1}(X)$$



$$\text{Cor}(-, X) \longleftarrow S^\infty(X) \text{ — пучок — инвариантный предел}$$

Теорема (S-V)

$\forall X \in \text{Sm}/k$ пучок $\text{Cor}(-, X)$ на Sm/k представим
т.е. это пучок $S^\infty(X)$

Замечание $S^\infty(X)$ — коммутативный моноид с $\{x\} = e$
 $S^\infty(X)^+$ $(x_1, \dots, x_n) (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ — конкатенация

Можно без точки x

$$\left(\coprod_{d \geq 0} S^d(X) \right) \text{ — полугруппа } \sim \left(\coprod_{d \geq 0} S^d(X) \right)^+ \text{ — группа Гротендика}$$

— взят моноид $(-, (\coprod_{d \geq 0} S^d(X))^+)$
— теорема говорит, что это изоморфизм пучков
 $\downarrow$
 $\text{Cor}(-, X)$

$M(X)$ — комплекс пучков Нисневича на $\text{Sm}_{Nis}(k)$

$$\bigcup_{\text{Sm}/k} \longrightarrow M(X)(u) := \text{Cor}(\Delta^* \times u, X) \stackrel{\text{T.S.V.}}{=} \text{Map}(\Delta^* \times u, \left(\coprod_{d \geq 0} S^d(X) \right)^+)$$

$$\text{Map}_{\text{Sh}_{\text{Nis}}}(\mathcal{Y}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(\mathcal{Y}) \quad \text{— лемма Чокердаби}$$

$$\text{Вспомним, что } H_{\text{Nis}}^i(\text{Spec}(k), A^\bullet) = H^i(A^\bullet(k))$$

В частности,

$$H_{\text{Nis}}^i(\text{Spec}(k), M(X)) = H^i(M(X)(\text{Spec}(k)))$$

$$C_*(X) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cos}(\Delta^\bullet, X)$$

↑ комплекс Суслина

$$= \text{Map}_{\text{Sh}_{\text{Nis}}}(\Delta^\bullet, (\coprod_{d \geq 0} S^d(X))^+)$$

$$\Delta_{\text{top}}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$$

$$\text{Map}_{\text{top}}(\Delta_{\text{top}}^\bullet, (\coprod_{d \geq 0} S^d(X)_{\text{top}})^+)$$

Теорема (Долбо-Том)

$$H_i(\text{Map}_{\text{top}}(\Delta_{\text{top}}^\bullet, (\coprod_{d \geq 0} S^d(X)_{\text{top}})^+)) = H_i(X, \mathbb{Z})$$

Теорема (S-V)

$$H_i\left(C_*(X) / {}_n C_*(X)\right) \xrightarrow{\sim} H_i\left(\text{Map}_{\text{top}}(\Delta_{\text{top}}^\bullet, (\coprod \dots)^+)\right) / {}_n = H_i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} & \text{Map}_{\text{Sh}}(\Delta^\bullet, (\coprod S^d(X))^+) \\ & \uparrow \\ & (\coprod_{d \geq 0} \text{Map}(\Delta^\bullet, S^d(X)))^+ \\ & \uparrow \\ & C_*(X) \end{aligned}$$

сформулировано
в 1986
1986 ~ 1993

если отпустить

$$\mathcal{U} \mapsto \mathbb{Z}(\text{Map}(\mathcal{U}, X))$$

в этальной топологии, то

получится абс. ад. группа, порожд.

$$\begin{aligned} \mathcal{U} & \mapsto \mathbb{Z} \subset \mathcal{U} \times X \\ & \downarrow \quad \downarrow \\ & \mathcal{U} \quad \mathcal{U} \end{aligned}$$

эталонный

$$\mathcal{U} = p^+, \quad \mathbb{A}^1 * \mathcal{U} = \mathbb{A}^1$$

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A}^1 * X$$

$$\downarrow$$

$\mathbb{A}^1$ — односвязно

→ таких этальных накрытий нет

Поэтому у Суслина это не получается доказать

Выводимый: Возьмем

$$U \longmapsto \mathbb{Z}[\text{Map}(U, X)]$$

и отпущен в qfh — квазикompактно топологии

$$U \longmapsto \text{Cor}(U, X) \rightarrow \text{правильные комплексы}$$

теперь
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \hookrightarrow & A^1 \times X \\ & \searrow \text{конечный} & \downarrow \\ & & A^0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \text{гомотопия хватает}$$

h -топология (сильнее qfh)

$$\text{Ext}_h(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \text{Ext}_{qfh}(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \text{Ext}_{\text{et}}(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

а тут X многообразия есть покрытие гадкими $\rightarrow$ все лок. кольца хорошие

Рассмотрим категорию CW -комплексов CW

$$F: CW^{\text{op}} \longrightarrow \text{ab} \text{ — предпушок} \quad (\text{compactly generated topology на произведении})$$

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\text{локальный гомеоморфизм}} & (CW, \text{покрытие лок. гомеом.}) \text{ — топология Зротекина} \\ \downarrow & & \downarrow (Sch/\mathbb{Q})_{\text{top}} \\ X & \xleftarrow{Sch/\mathbb{Q}} & CW \\ & & \text{— морфизм ситусов} \\ X & \longmapsto & X(\mathbb{Q}) = X_{\text{top}} \end{array}$$

Рассмотрим

$C_*(F)$ — ситулярный комплекс:

$$V \in CW \rightsquigarrow C_i(F)(V) = F(\Delta_{\text{top}}^i \times V)$$

Пусть $\underline{F}$ — ассоциированный с F (в сильной топологии) пучок

$\rightsquigarrow C_*(\underline{F})$ — комплекс пучков

$$\begin{array}{ccc} C_*(F)_{(pt)} & \xrightarrow{\text{постоянные пучки}} & \underline{F}_* \\ & & \uparrow \\ & & \underline{F} \text{ — как комплекс} \end{array}$$

Теорема

~~...~~ A — абелева группа

$$\text{Hom}(C_*(F)_{(pt)}, A) \xleftarrow{\sim} \text{Ext}_{Sh}^*(C_*(\underline{F}), A) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{Sh}^*(\underline{F}, A)$$

Без спектральных последовательностей:

$$I_1^{p,q} = \text{Ext}^p(\underline{F}_q, A) \Rightarrow \text{Ext}^{p+q}(\underline{F}_*, A) \quad // \text{Ext} = \text{Ext}_{Sh}$$

$$II^{p,q} = \text{Ext}^p(H_q(\underline{F}_*), A) \Rightarrow \text{Ext}^{p+q}(\underline{F}_*, A)$$

$$\underline{F}_q(V) = \underline{F}(\Delta_{top}^q \times V)$$

$$\text{Ext}^p(\underline{F}_q, A)$$

$$\text{Ext}^p(\underline{F}, A)$$

→ показать то же, что и для

$$\dots \rightarrow \underline{F} \xrightarrow{0} \underline{F} \xrightarrow{id} \underline{F} \xrightarrow{0} \underline{F}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Ext}^{p+q}(\underline{F}_*, A) = \text{Ext}^{p+q}(\underline{F}, A)$$

$H_q(\underline{F}_*)$ — пучок, ассоциированный с предпучком

$$H_q \text{ вида } V \mapsto H_q(\underline{F}(V \times \Delta_{top}^q))$$

→ $H_q(V)$ — гомотопический инвариант,

$$\text{т.е. } H_q(V) = H_q(V \times \Delta_{top}^1)$$

→ для стягиваемых V

$$H_q(V) = H_q(pt) = H_q(C_*(\underline{F})(pt))$$

→ $H_q(\underline{F}_*)$ постоянен и равен $H_q(C_*(\underline{F})(pt))$

Поэтому

$$II_{const}^{p,q} \longrightarrow II^{p,q}$$

— изоморфизм во втором члене

⇒ в пределе тоже.

Второй изоморфизм был доказан раньше.

План:

Взять в качестве $\underline{F}$ предпучок с трансферами,
написать аналогичную диаграмму в алгебраическом смысле,
и сравнить результаты (но нужны только конечные изоморфизмы)