18.10.2012

И. А. Панин

Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок абелевых групп на CW. Тогда диаграмма

комплекс ~~пр~~ постоянных пучков — комплекс пучков — комплекс вида $\dots \to \underset{(2)}{\underline{\mathcal{F}}} \xrightarrow{id} \underset{(1)}{\underline{\mathcal{F}}} \xrightarrow{0} \underset{(0)}{\underline{\mathcal{F}}} \to 0$

$$\mathcal{F}_*(pt) = C_*(\mathcal{F})(pt) \longrightarrow \underline{\mathcal{F}}_* \longleftarrow \underline{\mathcal{F}}$$

индуцирует изоморфизмы на $Ext^*(-, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

можно заменить $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ на A

Поэтому $H^*_{sing}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = Ext^*_{Sh}(\underline{\mathcal{F}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = Ext^*_{Sh}(\underline{\mathcal{F}}_*, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

Напоминание: $C_n(\mathcal{F})(Y) \overset{def}{=} \mathcal{F}(\Delta^n_{top} \times Y)$

$\underline{\mathcal{F}}$ — пучок, ассоциированный с $\mathcal{F}$

$\underline{\mathcal{F}}_n(Y) := \underline{\mathcal{F}}(\Delta^n_{top} \times Y)$

$H^*_{sing}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \; \cancel{= RHom(C_*(\mathcal{F})(pt), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \Rightarrow H^i(RHom(C_*(\mathcal{F})(pt), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$

---

(1) $Ext^p_{Sh}(\underline{\mathcal{F}}_q, A) \Rightarrow Ext^{p+q}_{Sh}(\underline{\mathcal{F}}_*, A)$ — Как выглядело доказательство?

$\quad \wr|$

$Ext^p_{Sh}(\underline{\mathcal{F}}, A) \Rightarrow Ext^{p+q}_{Sh}(\underline{\mathcal{F}}, A)$

по гомотопической инвариантности

Вообще, $Ext^p(G, A) \cong Ext^p(G_q, A)$

Например, если G представим, то

$G = h^X \rightsquigarrow G_q = h^{\underline{Hom}(\Delta^q, X)}$

$$\begin{array}{ccc} \underline{Hom}(\Delta^q, X) & \ni & (f : \Delta^q \to X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & & f(1,0,\dots,0) \in X \end{array}$$

гомотоп. эквивалентность

$\Rightarrow$ когомологии равны

(2)

Покажем, что $\mathcal{F}_*(pt) \longrightarrow \underline{\mathcal{F}}_*$ — квазиизоморфизм

$$\mathrm{Ext}^p_{Sh}(\underline{H}_q(\underline{\mathcal{F}}_*), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{Sh}(\underline{\mathcal{F}}_*, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

Что такое $\underline{H}_q(\mathcal{F}_*)$? Это пучок, ассоциированный с предпучком $Y \longmapsto H_q(\underline{\mathcal{F}}_*(Y)) =: \mathcal{H}_q(Y)$

Это гомотопически инвариантный предпучок

$\rightsquigarrow$ на стягиваемых пространствах Y

$$\mathcal{H}_q(Y) = \begin{cases} 0, & q > 0 \\ \ldots & \end{cases} = \mathcal{H}_q(pt)$$

$\rightsquigarrow$ $\underline{H}_q(\underline{\mathcal{F}}_*)$ — постоянный пучок, так как любой CW-комплекс локально стягиваем

$\underline{\mathrm{Ext}}^p(H_q(\underline{\mathcal{F}}_*(pt)), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

на самом деле,

$\underline{H}_q(\underline{\mathcal{F}}_*)$ = пост. пучку $H_q(\mathcal{F}_*(pt))$

$H_q(\underline{\mathcal{F}}_*(pt))$ = то же самое

$\rightarrow$ есть нужный квазиизоморфизм

$\rightsquigarrow$ соответствующие Ext равны

Пусть теперь G — предпучок с трансферами на $Sm/\mathbb{C}$ ~~гомотопически инвариантный~~

$j: CW \longrightarrow Sm/\mathbb{C}$ — морфизм сайтов

$Y(\mathbb{C}) \longleftarrow\!\shortmid Y$ $\qquad Sm_{сильн}(\mathbb{C}) \longrightarrow Sm_{Et}(\mathbb{C})$

$C_*(G) \longrightarrow \underline{G}_* \longleftarrow \underline{G}$

пример:
$\underline{G} = h^{S^\infty(X_+)}$
$X \in Sm/\mathbb{C}$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\mathrm{Ext}_{ab}(C_*(G)^{(pt)}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}_{Sh_{Et}}(\underline{G}_*, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}_{Sh_{Et}}(\underline{G}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

<u>Пояснение к док-ву</u>

$$\mathrm{Ext}^p_{Et}(\underline{G}_q, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{Et}(\underline{G}_*, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$$\mathrm{Ext}^p_{Et}(\underline{G}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{Et}(\underline{G}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

Замечание Этальные когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ гомотопически инвариантны $\Rightarrow$ левые части равны $\Rightarrow$ пределы равны $\Rightarrow$ второе равенство доказано первое равенство более содержательно

Теорема (жесткости) (Воеводский — Суслин)

Пусть $\mathcal{F}$ — (гомотоп. инвариантный) предпучок с трансферами на $Sm/\mathbb{C}$, причем имеется $n\neq 0$ такое, что $\forall Y\in Sm/\mathbb{C}$ $n\cdot\mathcal{F}(Y)=0$. Тогда

$$\underline{\mathcal{F}}_{Et}=\underline{\mathcal{F}(pt)}=\underline{\mathcal{F}}(pt)$$

Иначе говоря, $\forall Y\in Sm/\mathbb{C}$ и $\forall y\in Y$ — замкнутая точка

строго гензелево кольцо

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\mathcal{O}^{sh}_{Y,y}\right)=\mathcal{F}(y)}=\mathcal{F}(\mathbb{C})$$

// всегда есть морфизм $\underline{\mathcal{F}(pt)}\to\underline{\mathcal{F}}$

// пример: $\mathbb{C}\hookrightarrow\mathbb{C}(Y)^{alg}$

Замечание Эта теорема — обобщение теоремы о том, что $\mathcal{F}(k)=\mathcal{F}(K)$ для алгебраически замкнутых полей $k\hookrightarrow K$

Поверим в теорему жесткости. Как она поможет в доказательстве первого равенства? Если бы $n\cdot\underline{G}=0$, все было бы хорошо — продолжение в следующий раз

<u>Док-во теоремы жесткости</u> ($\dim Y=1$, $y\in Y$ — замкнутая точка)

$$\mathcal{O}^{sh}_{Y,y}=\varinjlim_{\alpha}\mathbb{C}[Y_\alpha]$$

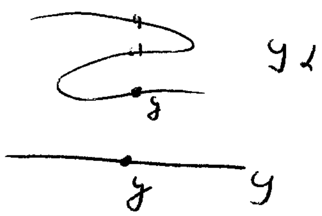
$Y_\alpha\ni y$ — этальная окрестность? = окрестность Нисневича точки $y\in Y$

$\pi_\alpha\downarrow$

$Y\ni y$ т.е. квадрат

$$\begin{array}{ccc} Y_\alpha - y & \hookrightarrow & Y_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y-y & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

— элементарный квадрат Нисневича



морфизмы: $\boxed{Y^{sh}_y=Spec\left(\mathcal{O}^{sh}_{Y,y}\right)}$

$$\begin{array}{ccc} (Y_\alpha,y) & \xrightarrow{\rho} & (Y_\beta,y) \\ {\scriptstyle\pi_\alpha}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle\pi_\beta} & \\ (Y,y) & & \end{array}$$

т.ч. диаграмма коммутативна — направленная система (с помощью расслоенного произведения)

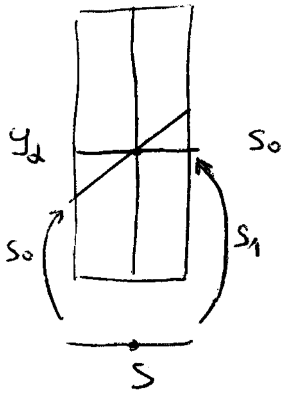
$$G\left(Y^{sh}_y\right):=\varinjlim_{\alpha}G(Y_\alpha)$$

$$G(pt)\longleftarrow G\left(Y^{sh}_y\right)\longleftarrow G(pt)$$

$\uparrow$ id $\Rightarrow$ инъективно.

Осталось показать сюръективность

Пусть $a \in G(Y_y^{sh})$ приходит из $a_\alpha \in G(Y_\alpha)$



$$\begin{tikzcd}
S \times Y_\alpha \arrow[r, "p"] \arrow[d] & Y_\alpha \ni y \arrow[d, "q"] \\
S = Y_y^{sh} \arrow[u, bend left, "s_0"] \arrow[u, bend right, "s_1"'] \arrow[ur, "\eta"] \arrow[r, "r"] & pt \arrow[u, bend right, "const"']
\end{tikzcd}$$

$s_0(y) = s_1(y)$

$\boxed{\text{Лемма}}$ (жесткости)

$s_0^* = s_1^* : \mathcal{F}(S \times Y_\alpha) \longrightarrow \mathcal{F}(S)$

поверим в эту лемму. Тогда

$G(S) \ni a = \eta^*(a_\alpha) = s_0^*(p^*(a_\alpha)) = s_1^*(p^*(a_\alpha)) = const^*(a_\alpha)$
$= r^*(q^*(a_\alpha)) \in G(pt)$ и все.

$\overline{Y_\alpha}$ — гладкая проективная кривая (после нормализации)

Y_α — гладкая $\quad Y_{\alpha,\infty} := \overline{Y_\alpha} \setminus Y_\alpha$

Рассмотрим $Pic(\overline{Y_\alpha}, Y_{\alpha,\infty}) = Div(Y_\alpha)/\sim =$ классы изоморфизмов пар $(\mathcal{L}, \varphi: \mathcal{O}_{Y_{\alpha,\infty}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{Y_{\alpha,\infty}})$, $\mathcal{L}$ на $\overline{Y_\alpha}$

Имеется алгебраическая группа

$$1 \to \underbrace{\Big(\prod_{y_i \in Y_{\alpha,\infty}} \mathbb{G}_m\Big)/\Delta(\mathbb{G}_m)}_{T} \hookrightarrow \underline{Pic^\circ}(\overline{Y_\alpha}, Y_{\alpha,\infty}) \twoheadrightarrow \underline{Pic^\circ}(\overline{Y_\alpha}) \longrightarrow 1$$

Более того, $\underline{Pic^\circ}(\overline{Y_\alpha}, Y_{\alpha,\infty})$ представляет функтор

$$Sch/\mathbb{C} \ni U \longmapsto Pic(\overline{Y_\alpha} \times U, Y_{\alpha,\infty} \times U) \xleftarrow{(pr_U^*(M),\, id) \;\leftarrow\; M} Pic(U)$$

$$= \{(\mathcal{L}, \varphi: q^*(M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{Y_{\alpha,\infty} \times U})\}, \quad M \in Pic(U)$$

$\Big(Y_{\alpha,\infty} \times U \xrightarrow{q = pr_U} U \Big)$

$/ Im(Pic(U))$

Заметим, что если U локальна, (в частности, $U = S = Y_y^{sh}$), то $Pic(U) = \{1\}$

Поэтому $\underline{Pic^\circ}(Y_\alpha, Y_{\alpha,\infty})(U) = \{(\mathcal{L}, \varphi: \mathcal{O}_{Y_{\alpha,\infty} \times U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{Y_{\alpha,\infty} \times U})\}/$изом. пар для такого U

На самом деле, группа в правой части изоморфна $\mathrm{Div}(\mathcal{Y}_\alpha \times U/U)/\sim$

„главные дивизоры"

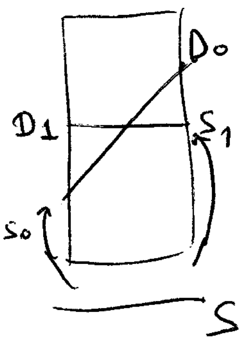
$\boxed{\text{Опр.}}$ $\mathrm{Div}(\mathcal{Y}_\alpha \times U/U) \overset{def}{=}$ свободная абелева группа, порожденная замкнутыми неприводимыми $Z \subset \mathcal{Y}_\alpha \times U$, т.ч. $Z \to U$ конечный сюръективный

„Главные дивизоры":

пусть $f \in \mathbb{C}(\overline{\mathcal{Y}_\alpha} \times U)$ регулярна в некоторой аффинной окрестности $\mathcal{Y}_{\alpha,\infty} \times U$ и $f|_{\mathcal{Y}_{\alpha,\infty}\times U} \equiv 1$

$\rightsquigarrow \mathrm{div}(f) \in \mathrm{Div}(\mathcal{Y}_\alpha \times U/U)$

$\boxed{\text{Лемма}}$ Есть изоморфизм между $\underline{\mathrm{Pic}^\circ}(\mathcal{Y}_\alpha, \mathcal{Y}_{\alpha,\infty})(U)$ и $\mathrm{Div}(\mathcal{Y}_\alpha \times U/U)/_{\text{глав.}}$



Рассмотрим $[D] = [D_1] - [D_0]$

Мы хотим доказать, что $s_0^* = s_1^* : \mathcal{F}(\mathcal{Y}_\alpha \times S) \rightrightarrows \mathcal{F}(S)$

Построим спаривание

$$\mathrm{Pic}^\circ(\overline{\mathcal{Y}_\alpha} \times S, \mathcal{Y}_{\alpha,\infty} \times S) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{Y}_\alpha \times S) \longrightarrow \mathcal{F}(S)$$

такое, что $[D_i]^* = s_i^*$

Тогда окажется, что $[D]^* = ([D_1] - [D_0])^* = s_1^* - s_0^*$ и

$\boxed{\text{Лемма}}$ $[D_1] - [D_0] \,\vdots\, n$

Поэтому $s_1^* - s_0^* = 0$

Сначала докажем лемму

$$\mathrm{Ker} \to \underline{\mathrm{Pic}^\circ}(\overline{\mathcal{Y}_\alpha}, \mathcal{Y}_{\alpha,\infty}) \xrightarrow{\cdot n} \underline{\mathrm{Pic}^\circ}(\overline{\mathcal{Y}_\alpha}, \mathcal{Y}_{\alpha,\infty}) \longrightarrow \{1\}$$

конечная групповая схема

точная последовательность пучков абелевых групп в эталной топологии

$$\to \{1\} \longrightarrow Ker(S) \longrightarrow \underline{Pic^{\circ}}(\overline{Y}_{\alpha}, Y_{\alpha,\infty})(S) \longrightarrow \underline{Pic^{\circ}}(\overline{Y}_{\alpha}, Y_{\alpha,\infty})(S) \to$$

$$\longrightarrow H^1_{et}(S, Ker(S))$$

строго гензелева

$$\Downarrow$$

$$H^i_{et}(S, Ker(S)) = \{0\} \quad , i>0$$

$$\begin{array}{l} \tilde{S} \ni \tilde{y} \\ \downarrow \exists \quad \| \\ S \ni y \end{array}$$

$\to \forall$ покрытие можно „уточнить"

(интуитивно говоря, S стягиваемо в этальной топологии)

$\Rightarrow$ для нашего $[D_1]-[D_0]$ существует $D' \subset Y_\alpha \times U$:

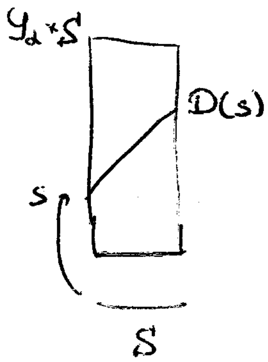
$n[D'] \sim [D_1]-[D_0]$ $\rightsquigarrow$ лемма доказана

Теперь построим спаривание

$$Pic(\overline{Y}_\alpha \times S, Y_{\alpha,\infty} \times S) \otimes \mathcal{F}(Y_\alpha \times S) \longrightarrow \mathcal{F}(S)$$

$$\| $$

$$Div(Y_\alpha \times S/S)/_{\{\text{главные}\}}$$



Рассмотрим $s^*: \mathcal{F}(Y_\alpha \times S) \longrightarrow \mathcal{F}(S)$

$$Div^{sect}(Y_\alpha \times S/S) \subset Div(Y_\alpha \times S/S)$$

подгруппа, порожденная $[D(s)]$ $\quad \cup$

„простые главные дивизоры" $\subset$ „главные дивизоры"

$$\rightsquigarrow Div^{sect}(Y_\alpha \times S/S) \otimes \mathcal{F}(Y_\alpha \times S) \xrightarrow{\langle , \rangle} \mathcal{F}(S)$$

$$\sum n_i [D(s_i)] \otimes a \longmapsto \sum n_i s_i^*(a)$$

① Лемма: $Div^{sect}/_{\text{„простые главные"}}$

$$\wr\wr$$

$Div/_{\text{„главные"}}$

утверждение „общего положения"
док-во — см. ссылку в след раз

② Лемма: если D — простой главный, то $\langle D, - \rangle = 0$

$$\begin{tikzcd}
& & f^{-1}(\mathbb{A}^1) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{Y}_d \times S \arrow[d, "\substack{(f\text{ — регулярно})\\ (f,\, pr_S)=F}"] \arrow[r, leftrightarrow] & f^{-1}(\{1\}) \supset Y_{d,\infty}\times S \arrow[d] \\
Z_\infty \arrow[d] & Z_0 \arrow[d] & \mathbb{A}^1_S = \mathbb{P}^1_S \setminus \{1\} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^1 \times S \arrow[r, leftrightarrow, "S\text{-морфизм}"] & \{1\} \\
\{\infty\}_S & \{0\}_S \in \mathbb{A}^1_S & & &
\end{tikzcd}$$

$$f^{-1}(\mathbb{A}^1) \cap (Y_{d,\infty} \times S) = \varnothing$$

Будем рассматривать диаграммы как выше такие, что F — конечный сюрьективный и F этален над $\{0\}_S$ и $\{\infty\}_S$.

В этом случае дивизор $F^{-1}(\{0\}\times S) - F^{-1}(\{\infty\}\times S)$ назовем <u>элементарным главным простым дивизором</u>

simple: без кратности

$\boxed{\text{У-в.}}$ $F^{-1}(\{0\}\times S) = \coprod D(s_i)$

$$\begin{tikzcd}
F^{-1}(\{0\}\times S) \arrow[d, "\substack{\text{— конечный (замена базы)}\\ \text{этальный}}"] \\
S \text{ — строго гензелево} \rightsquigarrow \text{доказано}
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow F^{-1}(\{0\}\times S) - F^{-1}(\{\infty\}\times S) \in Div^{sect}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ „Главные простые дивизоры"

= подгруппа в Div^{sect}, порожденная элементарными главными простыми дивизорами

Докажем теперь (2):

— достаточно доказать для элементарных простых главных

Возьмем $a \in \mathcal{F}(Y_d \times S)$

$$\begin{tikzcd}
a|_{f^{-1}(\mathbb{A}^1)} = b & a \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & a\cdot Y_d\times S \\
f^{-1}(\mathbb{A}^1) \arrow[rr, hook] & & \overline{Y}_d \times S
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\{s^*_{j,\infty}(b)\} & b \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \{s^*_{i,0}(b)\} \\
\coprod D(s_{j,\infty}) \arrow[d, equal] & & \coprod D(s_{i,0}) \arrow[d, equal] \\
Z_\infty \arrow[r, hook, "I_\infty"] \arrow[d, "F_\infty"] & f^{-1}(\mathbb{A}^1) \arrow[d, "F"] & Z_0 \arrow[l, hook', "I_0"'] \arrow[d, "F_0"] \\
\{\infty\}\times S \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^1\times S & \{0\}\times S \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим $Tr(b) \in \mathcal{F}(\mathbb{A}^1\times S) \xleftarrow[\text{гомотоп. инвар-сть}]{\simeq} \mathcal{F}(S)$

$$\begin{tikzcd}
i_\infty^*(\mathrm{Tr}(\ell)) & \mathrm{Tr}(\ell) \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & i_0^*(\mathrm{Tr}(\ell)) \\
\mathcal{F}(S) & \mathcal{F}(\mathbb{A}^1 \times S) \arrow[l] \arrow[r] & \mathcal{F}(S) \\
& \mathcal{F}(S) \arrow[ul] \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow \quad i_0^*(\mathrm{Tr}(\ell)) = i_\infty^*(\mathrm{Tr}(\ell))$$

$$i_0^*(\mathrm{Tr}(\ell)) = \mathrm{Tr}_{Z_0/\{0\}\times S}(I_0^*(\ell)) = \sum s_{i,0}^*(\ell)$$

$$i_\infty^*(\mathrm{Tr}(\ell)) = \mathrm{Tr}_{Z_\infty/\{\infty\}\times S}(I_\infty^*(\ell)) = \sum s_{j,\infty}^*(\ell)$$

почему? а вот почему:

$$\begin{tikzcd}
D(s_{j,\infty}) \arrow[r, hook, "I_{\infty,j}"] & f^{-1}(\mathbb{A}^1) \\
\{\infty\}\times S \arrow[u, "\pi_j", "\wr"'] \arrow[ur, "s_j"'] \arrow[d, bend right] & \\
\mathrm{Tr}_{D(s_{j,\infty})/S} = \pi_j^* &
\end{tikzcd}$$

– в случае изоморфизма Tr совпадает с пулбэком

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Tr}_{Z_\infty/\{\infty\}\times S}(I_\infty^*(\ell)) = \sum (I_{j,\infty}\circ\pi_j)^*(\ell) = \sum s_{j,\infty}^*(\ell)$$

$$\rightsquigarrow \quad 0 = \sum s_{i,0}^*(\ell) - \sum s_{j,\infty}^*(\ell) = ([Z_0]-[Z_\infty])^*(\ell)$$