И.А. Панин

$Y \in Sm/\mathbb{C}$ $\quad S^\infty Y$ — пучок на $Sm_{et}/\mathbb{C}$ и даже на $Sch_{et}/\mathbb{C}$ (схемы конечного типа)

Кроме того, $U \longmapsto \mathrm{Mor}_{Sch}(U, S^\infty Y)$ — пучок с трансферами → теорема жесткости верна

$\boxed{\text{Лемма}}$ $Z \in Sch/\mathbb{C}$, $j: CW \longrightarrow Sch_{et}/\mathbb{C}$ — морфизм сайтов

т.е. функтор на Sch т.ч....

$$\text{CW-комплексы} \xleftarrow{j^{-1}} Sch/\mathbb{C}$$

$$U(\mathbb{C})_{top} \longleftarrow U$$

+ открытое покрытие переходит в открытое покрытие

$$j^*(h^Z) = h^{Z(\mathbb{C})}$$

Док-во:

$$\underset{(W \in CW)}{\mathrm{Hom}_{Sh_{CW}}(j^*(h^Z), h^W)} = \mathrm{Hom}_{Sh_{Sch}}(h^Z, j_*(h^W)) =$$

$$= j_*(h^W)(Z) = h^W(j^{-1}(Z)) = h^W(Z(\mathbb{C})_{top}) = \mathrm{Map}_{\cancel{CW}}(\cancel{Z(\mathbb{C})}, W)$$

$$= \mathrm{Hom}_{Sh_{CW}}(h^{Z(\mathbb{C})_{top}}, h^W)$$

Лучше подставить вместо h^W любой пучок $S \in Sh_{CW}$:

$$\mathrm{Hom}_{Sh_{CW}}(j^*(h^Z), S) = \mathrm{Hom}_{Sh_{CW}}(h^{Z(\mathbb{C})_{top}}, S) \qquad \square$$

$\boxed{\text{Следствие}}$

$$j^*(h^{S^\infty(Y)}) = h^{S^\infty(Y)(\mathbb{C})} = h^{S^\infty(Y(\mathbb{C}))}$$

Пусть $\mathcal{F}$ — любой предпучок с трансферами на $Sch/\mathbb{C}$

$$C_*(\mathcal{F})(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}) \longrightarrow \underline{\mathcal{F}}_* \longleftarrow \underline{\mathcal{F}}$$

ассоциированный пучок, он же комплекс

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to & \underset{(-2)}{\underline{\mathcal{F}}} & \xrightarrow{id} & \underset{(-1)}{\underline{\mathcal{F}}} & \xrightarrow{0} & \underset{(0)}{\underline{\mathcal{F}}} & \to & 0 \\
 & & & & & \uparrow & & \\
\ldots \to & 0 & \to & 0 & \to & \underline{\mathcal{F}} & \to & 0
\end{array}$$

— квази-изоморфизм

$$\mathcal{F}_n(U) = \underline{\mathcal{F}}(\Delta^n \times U)$$

$\boxed{\text{Теорема}}\boxed{1}$

$$H^i(\mathrm{Hom}(C_*(\mathcal{F})(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$$

$$\uparrow \wr$$

$$\mathrm{Ext}_{et}(\underline{\mathcal{F}}_*, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$$\downarrow \wr$$

$$\mathrm{Ext}_{et}(\underline{\mathcal{F}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ (Теорема) $j: CW \longrightarrow Sch_{et}$ — морфизм сайтов

$\rightsquigarrow j_*: Sh_{cw} \longrightarrow Sh_{et}$ $\quad\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — постоянный пучок

Тогда $Rj_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, & i=0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $H^i_{et}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = H^i(X(\mathbb{C})_{top}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \quad \forall X \in Sch/\mathbb{C}$

$$j^*(C_*(\mathcal{F})(Spec(\mathbb{C}))) \longrightarrow j^*(\mathcal{F}_*) \longleftarrow j^*(\mathcal{F})$$

$$Ext^i_{cw}(j^*(\mathcal{F}_*), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} Ext^i_{cw}(j^*(\mathcal{F}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

Утверждение: из теоремы 1 следует, что α — изоморфизм

$$Ext^i_{cw}(j^*(\mathcal{F}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = Ext^i_{et}(\mathcal{F}, R^{total}_{j_*}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) = Ext^i_{et}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$$Ext^i_{cw}(j^*(\mathcal{F}_*), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = Ext^i_{et}(\mathcal{F}_*, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} Ext^i_{et}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

по Теореме 1

С другой стороны:

$$Ext^i_{cw}(j^*(\mathcal{F}_*), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} Ext^i_{cw}(j^*(C_*(\mathcal{F})(Spec(\mathbb{C}))), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$$\| $$

$$Ext^i_{et}(\mathcal{F}_*, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta'} Ext^i_{et}(C_*(\mathcal{F})(Spec(\mathbb{C})), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$\| $ по опр. Ext

$$Ext^i_{et}(\mathcal{F}_*, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(Hom(C_*(\mathcal{F})(Spec(\mathbb{C})), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$$

$\beta' =$ — изоморфизм по Теореме 1

Теперь подставим $\mathcal{F} = S^\infty Y$

$$Ext^i(\underbrace{j^*(C_*(\mathcal{F})(Spec(\mathbb{C})))}_{C_*(Y)}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow Ext^i(\underbrace{j^*(\mathcal{F})}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$C_*(Y)$ — комплекс Суслина для Y

$$j^*(\mathcal{F}) = j^*(h^{S^\infty(Y)}) = h^{S^\infty(Y)(\mathbb{C})} = h^{S^\infty(Y(\mathbb{C}))} = S^\infty(Y(\mathbb{C}))$$

инд-схема коммутирует с j^*

$$Ext^i(S^\infty(Y(\mathbb{C})), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = H^i(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

Итак,

$\mathcal{F} := S^\infty(Y)$ на Sch_{et} $\rightsquigarrow$

$$C_*(\mathcal{F})(Spec(\mathbb{C})) \longrightarrow j^*(\mathcal{F}_*) \longleftarrow j^*(\mathcal{F})$$

$$C_*(\mathcal{F})(Spec(\mathbb{C})) = C_*(Y) \longrightarrow C_*(Y(\mathbb{C})_{top})$$

$$j^*(\mathcal{F}) = S^\infty(Y(\mathbb{C}))$$

Сингулярный комплекс Y: $C_*(Y(\mathbb{C})_{top})$

Желаем знать, что после перехода к конечным коэффициентам это квази-изоморфизм.

$$j^*(\mathcal{F}_*) = j^*(C_{m*}(h^{S^\infty(Y)}))$$

$$j^*(C_n(h^{S^\infty(Y)})(U)) = \dots$$

$$C_n(S^\infty(Y))(Spec(\mathbb{C})) = S^\infty(Y)(\Delta^n) = Mor_{Sch}(\Delta^n, S^\infty(Y)) \longrightarrow Map_{cw}(\Delta^n_{top}, S^\infty(Y(\mathbb{C}))) = C_n(Y(\mathbb{C})_{top})$$

$$\pi_i(S^\infty(Y(\mathbb{C}))) = H_i(Y(\mathbb{C}))$$

$\Downarrow$ есть стрелка

$$j^*(\mathcal{F}_*) \longrightarrow j^*$$

$$j^*(S^\infty(Y)_n) = j^*(\underline{Hom}(\Delta^n, S^\infty(Y))) \overset{?}{\longrightarrow} \underline{Hom}_{top}(\Delta^n_{top}, S^\infty(Y(\mathbb{C}))_{top})$$

откуда?

$$\underline{Hom}(\Delta^n, S^\infty(Y)) \overset{?}{\longrightarrow} j_*(\underline{Hom}(\Delta^n_{top}, S^\infty(Y(\mathbb{C}))))$$

$$\underline{Hom}_{top}(\Delta^n_{top}, S^\infty(Y(\mathbb{C}))_{top}) = C_n(\underline{S^\infty(Y(\mathbb{C}))}_{top})$$

$$\underline{Hom}(\Delta^n, G)(U) := G(\Delta^n \times U)$$

$$Mor_{Sch}(\Delta^n \times U, S^\infty(Y)) = \underline{Hom}(\Delta^n, S^\infty(Y))(U) \overset{?}{\longrightarrow} j_*(\underline{Hom}(\Delta^n_{top}, S^\infty(Y(\mathbb{C}))))(U)$$

$$Mor_{Sch}(\Delta^n \times U, S^\infty(Y)) \xrightarrow{\text{канонич.}} Mor_{cw}(\Delta^n_{top} \times U(\mathbb{C}), S^\infty(Y(\mathbb{C}))) = j_*(\underline{Hom}(\Delta^n_{top}, S^\infty(Y(\mathbb{C}))))(U)$$

$\Rightarrow$ получили стрелку

$$j^*(\underline{S^\infty(Y)}_*) \longrightarrow \underline{S^\infty(Y(\mathbb{C}))}_{*,top}$$

Получили коммутативную диаграмму комплексов пучков на CW:

$$\begin{tikzcd}
j^*(C_*(S^\infty(Y))(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & j^*(\underline{S^\infty(Y)}_*) \arrow[d] & j^*(S^\infty(Y)) \arrow[l] \arrow[d, equal] \\
C_*(Y(\mathbb{C})_{top}) \arrow[r] & \underline{S^\infty(Y(\mathbb{C}))}_{*,top} & S^\infty(Y(\mathbb{C})) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Теорема 2 Стрелка ε индуцирует квази-изоморфизм комплексов

$$\begin{tikzcd}
C_*(S^\infty(Y))(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "\wr"] & H_*(C_*(Y)/n\,C_*(Y)) \arrow[d, "\wr\ \text{— изоморфизм}"] \\
C_*(Y(\mathbb{C})_{top}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, Rightarrow] & H_*(Y, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Док-во Достаточно доказать, что ε индуцирует квази-изоморфизм на комплексах (т. об универсальных коэффициентах)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(C_*(S^\infty(Y))(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
\mathrm{Hom}(C_*(Y(\mathbb{C})), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[u, "\varepsilon'"']
\end{tikzcd}$$

Применим к нашей диаграмме $\mathrm{Ext}(-, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

в верхней строчке получатся изоморфизмы, как мы уже доказали:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^i_{cw}(j^*(C_*(S^\infty(Y))(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})))) & \mathrm{Ext}^i_{cw}(j^*(\overset{S^\infty(Y)}{\cancel{\mathcal{F}}}_*), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[l, "\beta", "\sim"'] \arrow[r, "\alpha", "\sim"'] & \mathrm{Ext}^i_{cw}(j^*(S^\infty(Y)), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
\mathrm{Ext}^i_{Ab}(C_*(Y(\mathbb{C})), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[u, "?"] & \mathrm{Ext}^i_{cw}(\underline{S^\infty(Y(\mathbb{C}))}_*, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Ext}^i_{cw}(S^\infty(Y(\mathbb{C})), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

Мы давно доказали, что здесь изоморфизмы: для предпучка G

$$\mathrm{Ext}^i_{Ab}(C_*(G)(pt), A) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_{cw}(\underline{G}_*, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_{cw}(G, A)$$

Верхняя строчка по сопряженности совпадает с

$$\mathrm{Ext}^i_{Ab}(C_*(\mathcal{F})(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_{et}(\mathcal{F}_*, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_{et}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

□

теорема жесткости

следует из гомотопической инвариантности:
$H^*_{et}(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong H^*_{et}(U \times \mathbb{A}^1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$