И.А.Панин

В прошлый раз был предложен следующий план

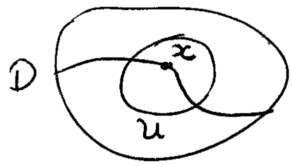
① $\mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,x}) \hookrightarrow \mathcal{F}_\eta$

$\Downarrow$

②
$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_{Nis}(U) \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & \mathcal{F}_\eta \\ & \mathcal{F}_{Nis}(V) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

③ $\mathcal{F}_{Nis}(U) \xleftarrow{\sim} \mathcal{F}(U)$ для $U \hookrightarrow \mathbb{A}^1_k$

$X \in Sm/k$. Мы доказали такую $\boxed{\text{лемму}}$ (для $\dim X = 1$)



Существует $\underset{x}{\overset{}{U}} \ni x$, $U \hookrightarrow X$ и

существует $\Phi \in Cor(U, X-D)$ т.ч. $\bar{j}\circ\bar{\Phi} = \bar{i}$ в $\overline{Cor}(U,X)$

$$\begin{tikzcd} X & X-D \arrow[l, hook', "j"'] \\ U \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Опр}}$ $\overline{Cor}(U,X) = Coker\left(Cor(\mathbb{A}^1\times U, X) \xrightarrow{i_1^* - i_0^*} Cor(U,X)\right)$

Выведем из этой Леммы пункт (1):

хотим найти $\alpha \in \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}_\eta$ т.ч. $\alpha \longmapsto 0$

$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{g:\, g(x)\neq 0} \mathcal{F}(X_g)$, $\qquad \mathcal{F}_\eta = \varinjlim_{f\neq 0} \mathcal{F}(X_f)$

a) можно считать, что $\alpha \in \mathcal{F}(\underset{x}{X_g})$ ($x \in X_g$). Уменьшая X, можно считать, что $\alpha \in \mathcal{F}(X)$.

b) $\alpha \in \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}_\eta = \varinjlim_{f\neq 0}\mathcal{F}(X_f)$

$\alpha \longmapsto 0 \Rightarrow \exists f \in k[X],\ f\neq 0$ т.ч. $\alpha|_{X_f} = 0$ в $\mathcal{F}(X_f)$

Положим $D = \{f=0\}$.

c) Найдем $U \ni x$, $U \hookrightarrow X$ и $\Phi \in Cor(U, X-D)$: $\bar{j}\circ\bar{\Phi} = \bar{i}$

d) $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный $\Rightarrow$
$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}: Cor \arrow[rr] \arrow[dr] & & Ab \\ & \overline{Cor} \arrow[ur, "\bar{\mathcal{F}}"'] & \end{tikzcd}$$

Поэтому $\underbrace{(\bar{i})^*(\alpha)}_{=\,\alpha|_U} = (\bar{\Phi})^*(\bar{j}^*(\alpha)) = 0$

$$0 \longrightarrow k^\times \longrightarrow k(t)^\times \longrightarrow \bigoplus_{x\in\mathbb{A}^1_k} \mathbb{Z}\cdot[x] \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_2 k \longrightarrow K_2 k(t) \longrightarrow \bigoplus_{x\in\mathbb{A}^1_k} K_1(k(x)) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K^M_n k \longrightarrow K^M_n k(t) \longrightarrow \bigoplus_{x\in\mathbb{A}^1_k} K^M_{n-1}(k(x)) \longrightarrow 0$$

a posteriori верно следующее:

$$0 \to \mathcal{F}(k) \to \mathcal{F}(k(t)) \to \bigoplus_{x\in\mathbb{A}^1_k} \mathcal{F}_{-1}(x) \to 0 \qquad \frac{\mathcal{F}(k(t))}{\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x})} = \mathcal{F}_{-1}(x)$$

Кроме того, если

$$\begin{tikzcd} k(t)^h & \mathcal{O}^h_{\mathbb{A}^1,x} \arrow[l, hook'] \\ k(t) \arrow[u] & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x} \arrow[l, hook'] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

— гензелизация, то

$$\frac{\mathcal{F}(k(t)^h)}{\mathcal{F}(\mathcal{O}^h_{\mathbb{A}^1,x})} \xleftarrow{\sim} \frac{\mathcal{F}(k(t))}{\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x})}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[rr] \arrow[dr, "a_{Nis}"'] & & \mathcal{F}_{Nis,\eta}(U) = \mathcal{F}_\eta \\ & \mathcal{F}_{Nis}(U) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} \qquad \eta \hookrightarrow \mathbb{A}^1_k$$

желаем доказать, что

i) $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_\eta$ — инъективно ($\Rightarrow a_{Nis}$ инъективно)

ii) a_{Nis} сюръективно

Как можно доказывать (ii)?

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \underset{\substack{\Psi \\ \beta}}{\mathcal{F}(k(t))} \to \bigoplus_{x\in U} \frac{\mathcal{F}(k(t))}{\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x})} \longrightarrow 0$$

— должно быть верно

Мы уже знаем, что $\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) \hookrightarrow \mathcal{F}(k(t))$

его коядро — в точности $\dfrac{\mathcal{F}(k(t))}{\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x})}$

$\beta \in \mathcal{F}(U) \Longleftrightarrow \beta \longmapsto 0$ в $\mathcal{F}(k(t))/\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x})$ $\forall x \in U$

т.е.
$$\begin{tikzcd} & \beta \in \bigcap\limits_{x\in U} \mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) \arrow[r, hook] & \mathcal{F}(k(t)) \\ \mathcal{F}(U) \arrow[ur, hook] \arrow[urr, hook, bend right] & & \end{tikzcd}$$

— инъективно по (i)

сюръективность этой стрелки будет верна, если $\mathcal{F}$ на $\mathbb{A}^1$ — это пучок Зарисского

Из точности последовательности
$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(k(t)) \to \bigoplus_{x\in U} \frac{\mathcal{F}(k(t))}{\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x})} \to 0$$
следует, что $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sim} \bigcap\limits_{x\in U} \mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x})$

Посмотрим на диаграмму
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\mathcal{O}^h_{\mathbb{A}^1,x}) \arrow[r] & \mathcal{F}(k(t)^h) \arrow[r] & \mathcal{F}(k(t)^h)/\mathcal{F}(\mathcal{O}^h_{\mathbb{A}^1,x}) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{F}(k(t)) \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{F}(k(t))/\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

— поверим пока.

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{F}(k(t)) \\ \bigcap\limits_{x\in U} \mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) = \mathcal{F}_{Zar}(U) \arrow[urr, hook] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bigcap \mathcal{F}_{Nis}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) & \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r] & \mathcal{F}_{Nis}(U) \arrow[u] \arrow[uur] & \end{tikzcd}$$

это изоморфизм, поскольку $\mathcal{F}_{Nis}$ является пучком Зарисского

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "?"] \arrow[rr, dashed, bend right] & \mathcal{F}_{Zar}(U) \arrow[r, "?"] & \mathcal{F}_{Nis}(U) \end{tikzcd}$$

достаточно доказать, что эта стрелка сюръективна

Покажем, что $\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) \to \mathcal{F}_{Nis}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x})$ — изоморфизм.

$\mathcal{F}_{Nis}$ — пучок $\Rightarrow$ квадрат
$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(\mathcal{O}^h_{\mathbb{A}^1,x}) = \mathcal{F}_{Nis}(\mathcal{O}^h_{\mathbb{A}^1,x}) \arrow[r] & \mathcal{F}_{Nis}(k(t)^h) = \mathcal{F}(k(t)^h) \\ \mathcal{F}_{Nis}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{F}_{Nis}(k(t)) = \mathcal{F}(k(t)) \arrow[u] \\ \mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) \arrow[u] \arrow[uu, bend left] \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd}$$

— декартов

изоморфизм! $\Rightarrow$
$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_{Nis}(U) \arrow[r] \arrow[dr] & \bigcap \mathcal{F}_{Nis}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) \arrow[d, "\wr"] \\ & \mathcal{F}(k(t)) \end{tikzcd}$$

$\leftarrow$ сюръекция по (2)

$\Rightarrow$ она еще и инъекция.

Итак,

$$\begin{tikzcd}
\bigcap \mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) \arrow[r, "\sim"] & \bigcap \mathcal{F}_{Nis}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) \\
\mathcal{F}(U) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{F}_{Nis}(U) \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

из декартовости

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\mathcal{O}^h_{\mathbb{A}^1,x}) \arrow[r] & \mathcal{F}(k(t)^h) \\
\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F}(k(t)) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

из изоморфизма

$$\mathcal{F}(k(t)^h)/\mathcal{F}(\mathcal{O}^h_{\mathbb{A}^1,x}) \overset{\wr}{\longleftarrow} \mathcal{F}(k(t))/\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x})$$

из точности последовательности

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(k(t)) \to \bigoplus \mathcal{F}(k(t))/\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) \to 0$$

из того, что $\mathcal{F}_{Nis}$ — пучок Зарисского

<u>Д-во точности:</u>

Достаточно доказать, что $\mathcal{F}$ на $\mathbb{A}^1$ — пучок Зарисского.

В частности, тогда

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_{Zar}(U) \arrow[r] \arrow[dr, hook] & \mathcal{F}(k(t)) = \mathcal{F}_\eta \\
& \mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,x}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

— инъекция

$\boxed{\text{Лемма}}$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, bend right, "\Psi"'] & U - \{x\} \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

$x \in X$.

Построим $\Psi \in Cor(U, U - \{x\})$

такое, что $\bar{i} \circ \bar{\Psi} = \overline{id_U}$

Тогда

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\bar{i}^*"] \arrow[dr, "\overline{id_U}^* = id"'] & \mathcal{F}(U - \{x\}) \arrow[d, "\bar{\Psi}^*"] \\
& \mathcal{F}(U)
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U - \{x\})$ — инъекция