13.09.2012

K-теория однородных многообразий

А. Ананьевский

Опр. $\mathcal{E}$ — точная категория (можно думать про абелеву категорию)

$Q\mathcal{E}$ — новая категория: $Ob(Q\mathcal{E}) = Ob(\mathcal{E})$ Q-конструкция Квиллена

морфизмы: $E_1, E_2 \in \mathcal{E} \rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl] \arrow[dr, two heads] & \\ E_1 & & E_2 \end{tikzcd}$$

Опр. $\mathcal{A}$ — категория, тогда

$N\mathcal{A}$ — симплициальное множество — <u>нерв</u> категории $\mathcal{A}$

$(N\mathcal{A})_0 = Ob\,\mathcal{A}$

$(N\mathcal{A})_1 = Mor(\mathcal{A})$

$(N\mathcal{A})_2 = \underset{E_1}{\cdot} \longrightarrow \underset{E_2}{\cdot} \longrightarrow \underset{E_3}{\cdot}$

Опр. $K_i(\mathcal{E}) = \pi_{i+1}|NQ\mathcal{E}|$

$K_0(\mathcal{E}) = \bigoplus \mathbb{Z}[E] \Big/ \langle [E_1]+[E_2]=[E] \mid E_1 \rightarrowtail E \twoheadrightarrow E_2 \rangle$

($[E]$ — классы изоморфизма объектов $\mathcal{E}$)

Например

R — комм. кольцо $\rightsquigarrow \mathcal{E} = proj\text{-}R \rightsquigarrow K_i(R) := K_i(proj\text{-}R)$

$\mathcal{E} = mod\text{-}R \rightsquigarrow K_i'(R) = G_i(R) := K_i(mod\text{-}R)$

X — схема

$\mathcal{E} = Vect(X) \rightsquigarrow K_i(X) := K_i(Vect(X))$

($Vect(X)$ — категория векторных расслоений над X, т.е. локально свободных когерентных модулей)

// $X = Spec(R)$ — частный случай

$\mathcal{E} = coh(X) \rightsquigarrow K_i'(X) = G_i(X) := K_i(mod\text{-}R)$

Иногда $K_i = K_i'$:

если R — регулярное,

или схема X регулярна

$$\left.\begin{aligned} K_i(X) \times K_j'(X) &\longrightarrow K_{i+j}'(X) \\ K_i(X) \times K_j(X) &\longrightarrow K_{i+j}(X) \end{aligned}\right\} \text{индуцированы } \otimes$$

X — регулярно $\quad K_i \longrightarrow K_i'$ — локально своб. $\Rightarrow$ когерентные

$\rightsquigarrow \underset{\text{модуль}}{[M]} \cdot [N] = [M] \cdot \left(\sum (-1)^i [P_i]\right) = \sum (-1)^i [M \otimes P_i]$

$K_i(-)$ — контравариантные функторы (на схемах)
$K_i'(-)$ — ковариантны относительно собственных (проективных)

Далее — только гладкие схемы

Последовательность локализации:

замкнутое вложение

$$Z \overset{i}{\hookrightarrow} X \overset{j}{\hookleftarrow} U = (X \setminus Z)$$

$$\ldots \to K_n(Z) \xrightarrow{i_*} K_n(X) \xrightarrow{j^*} K_n(U) \xrightarrow{\partial} K_{n-1}(Z) \to \ldots$$

$K_n(X \times \mathbb{A}^1) \underset{p^*}{\overset{\simeq}{\leftarrow}} K_n(X)$ — гомотопическая инвариантность

p^* — соответствует проекции $X \times \mathbb{A}^1 \to X$

<u>Примеры</u>

- $K_0(\mathrm{Spec}\, k) \simeq \mathbb{Z}$ (k — поле)
- $K_i(\mathbb{F}_q) = \ldots$ (что-то)
- $K_0(k[x_1, \ldots, x_n]) \simeq \mathbb{Z}$
- $K_4(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$
- $K_*(\mathbb{P}^n) = ?$

  Ответ: $K_*(\mathbb{P}^n) = K_*(k)[t]/(t^{n+1})$ — теорема о проективизированном расслоении (Квиллен)

- $K_*((\mathbb{P}^n)_\gamma) \simeq \bigoplus_{i=0}^{n} K_*(A_\gamma^{\otimes i})$ (Квиллен)

  ц.п. алгебра

  $\gamma \in H^1(k, PGL_{n+1})$

- $Q \subset \mathbb{P}^{2n+1}$, $q(x_1, \ldots, x_{2n+2}) = 0$ $\rightsquigarrow K_*(Q) = \bigoplus_{i=0}^{2n-1} K_*(k) \oplus K_*(C_0(q))$

  чётная часть алг. Клиффорда

- Более общий ответ:

  $K_*(G/P) \cong \bigoplus K_*(A_i)$ (Панин)

  конечно ц.п. алгебры (алг. Титса)

Как получать такие результаты?

G — алг. группа, гладкая, расщепимая редуктивная, связная

X — однородное многообразие:

$G \times X \longrightarrow X$ — действие группы, причём

$G_{\bar{k}} \times X_{\bar{k}} \longrightarrow X_{\bar{k}}$ — транзитивное действие

Примеры: • $H \leq G \rightsquigarrow G/H$ — однородное

- $G = \{x^2+y^2=1\}$
  $X = \{x^2+y^2=3\}$ над $\mathbb{Q}$
- Если есть рац. точка $x\in X$, то $X \simeq G/\mathrm{Stab}_G(x)$

Нас будут интересовать именно такие примеры: $X = G/H$

G, H — редуктивные, расщ., связные,...

Опр. $\mathrm{Vect}^G(X)$ — G-эквивариантные расслоения

это тоже хорошая категория

$G \curvearrowright E$

$\downarrow$ действия согласованы:

$G \curvearrowright X$

$$\begin{tikzcd} G\times E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ G\times X \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

— коммутативна

$K_*^G(X) = K_*(\mathrm{Vect}^G(X))$ — G-эквивариантная K-теория

$\boxed{\text{Thm}}$ $X = G/H$ ⇝ $\exists$ тензорная эквивалентность

$$\mathrm{Vect}^G(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}(H)$$
$$E \longmapsto E|_{eH}$$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $K_*^G(X) \simeq K_*(\mathrm{Rep}(H)) = K_0(\mathrm{Rep}(H))\otimes_{\mathbb{Z}} K_*(k) =$

$= R(H)\otimes_{\mathbb{Z}} K_*(k)$

кольцо представлений

$$\mathrm{Vect}^G(X) \longrightarrow \mathrm{Vect}(X)$$
$$\downarrow$$
$$K_*^G(X) \longrightarrow K_*(X)$$

$$\mathrm{Rep}(G) \xrightarrow{\text{res}} \mathrm{Rep}(H) \longrightarrow \mathrm{Vect}^G(X) \longrightarrow \mathrm{Vect}(X)$$
$$V \longmapsto X\times \mathbb{A}^{\dim V}$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}\otimes_{R(G)} K_*^G(X) \longrightarrow K_*(X)$

Что можно сказать про это отображение?

$\boxed{\text{Thm}}$ (Меркурьев)

G — расщепимая односвязная $\Rightarrow$ существует спектральная пос-ть

$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^{R(G)}(\mathbb{Z}, K_q^G(X)) \Longrightarrow K_{p+q}(X)$

(что-то типа спектральной последовательности Эйленберга–Мура)

Thm (Стейнберг, 1975) G — расщепимая односвязная

$H \leq G$ — связная расщепимая, $rk\, H = rk\, G$

$\Rightarrow R(H)$ — свободный модуль над $R(G)$ ранга $[W(G):W(H)]$

Следствие $K_n(G/H) \simeq \bigoplus_{i=1}^{[W(G):W(H)]} K_*(k)$

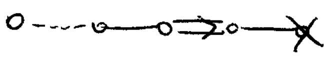
Пример

• $G \geq L(P)$ — L: подгруппа Леви, P: парабол.

$G/L(P) \to G/P$ — расслоение с аффинными слоями $U(P)$

• $Sp_{2n} / Sp_2 \times Sp_{2n-2}$

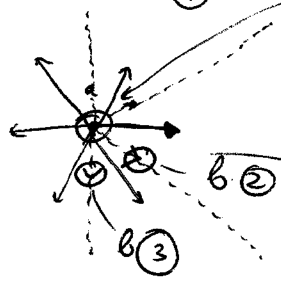
•



$F_4/Spin_9$ (F_4/B_4)

$A_2 \geq A_1$

$SL_3 \geq \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$



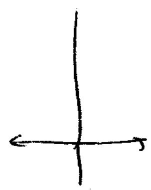
① — в ней выбираем 0

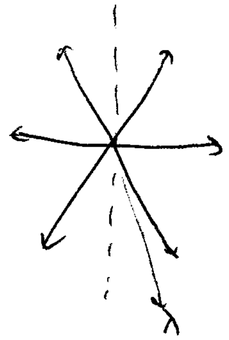
в ②

в ③

Представления $A_2 \longleftrightarrow$ пары весов

эти 3 представления дают базис

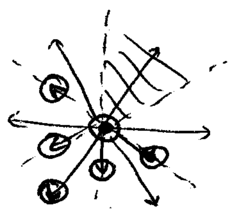




$\lambda^H = e^{\mu^G+\alpha^H} - e^{\mu_1^H+\alpha^H} e^{\mu_2^H+\alpha^H}$

$A_2 \geq 0$

$SL_3 \geq T$



Как скручивать ответ? представление H не обязано скручиваться

$K_n(G/H) = \bigoplus K_*(k)[\nu_H(\lambda_i)]$

$K_n((G/H)_\gamma) = \bigoplus K_*(\mathrm{End}(\nu_G(-\lambda_i)))\cdot[\nu_H(\lambda_i)\otimes\nu_G(-\lambda_i)]$

$G/Z \curvearrowright G/H$.

этот ответ скручивается при помощи $H^1(k, G/Z)$

$$K_*(\mathbb{G}_m) = K_*(k) \oplus K_{*-1}(k)$$

$$K_*(SL_n) = K_*(k) \otimes \Lambda(x_1, \dots, x_n) \qquad // H = \{e\}$$

$$= K_*(k) \oplus K_{*-1}(k)^{\oplus n} \oplus \dots$$

$$K_*(G_2/GL_2) = \oplus K_{*+1}(k) \oplus K_*(k;2) \quad ?$$

Если ранги разные, то $R(H)$ над $R(G)$ не свободен

Правда ли, что $R(H)$ свободен над $\mathrm{Im}(R(G) \to R(H))$