08.11.2012

С. Иванов

По димерной модели G построим алгебры

$$\underbrace{A(G)}_{\text{алгебра суперпотенциала}}, \quad \underbrace{B(G)}_{\text{некоммутативная торическая алгебра}}, \quad \underbrace{R(G)}_{\text{торическая алгебра}}$$

<u>Колчан</u> Q — ориентированный конечный граф

$$(\underbrace{Q_0}_{\text{вершины}};\ \underbrace{Q_1}_{\text{стрелки}};\ s,t: Q_1 \longrightarrow Q_0)$$

Путь: $\xrightarrow{\alpha_1}\cdot\xrightarrow{\alpha_2}\cdot \ldots \cdot\xrightarrow{\alpha_n}\cdot$ $\qquad t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$

$\alpha_1 \ldots \alpha_n$

Путь нулевой длины: e_i для вершины i

+ операция приписывания $\qquad \cdot\xrightarrow{p}\cdot\xrightarrow{q}\cdot$, $\ pq$

$e_i^2 = e_i$, в частности

$\mathbb{C}Q$ — алгебра путей колчана Q:

базис = все пути

произведение $p \cdot q = \begin{cases} \text{приписывание, если} & t(p) = s(q) \\ 0, & t(p) \neq s(q) \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}Q$ — асс. алгебра с единицей $1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$

$[\mathbb{C}Q, \mathbb{C}Q]$ — векторное пространство, порожденное коммутаторами $[p,q] = pq - qp$.

$\mathbb{C}Q / [\mathbb{C}Q, \mathbb{C}Q]$ — <u>пространство циклических путей</u>

$\parallel$

$\mathbb{C}Q_{cyc}$ $\qquad i \xrightarrow{p} j \qquad i \neq j \rightsquigarrow p = [e_i, p] \in [\mathbb{C}Q, \mathbb{C}Q]$

$p = \alpha_1 \ldots \alpha_n \rightsquigarrow [\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n] = \alpha_1 \ldots \alpha_n - \alpha_2 \ldots \alpha_n \alpha_1$

$\rightsquigarrow$ базис — циклические пути без начала и конца

$\alpha \in Q_1$. Зададим отображение

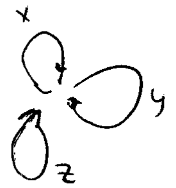
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}: \mathbb{C}Q_{cyc} \longrightarrow \mathbb{C}Q$$

$$\frac{\partial \alpha_1\ldots\alpha_n}{\partial\alpha} = \sum_{i:\alpha_i=\alpha} \alpha_{i+1}\ldots\alpha_n\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}$$

(супер)
<u>потенциал</u> — элемент $\mathbb{C}Q_{cyc}$: $W \in C_{cyc}$

$$A(Q,W) = \mathbb{C}Q \Big/ \left(\frac{\partial W}{\partial\alpha} \;\Big|\; \alpha \in Q\right)$$

$\boxed{\text{Пример}}$ Q :



$W = xyz - xzy$

$\mathbb{C}Q = \mathbb{C}\langle x,y,z\rangle$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = yz - zy$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = zx - xz$$

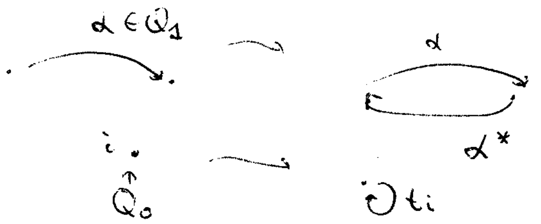
$$\frac{\partial W}{\partial z} = xy - yx$$

$\rightsquigarrow A(Q,W) = \mathbb{C}[x,y,z]$

3-Калаби-Яу алгебра

Алгебра Гинзбурга

$\hat{Q}$.



т.е. $\hat{Q}_0 = Q_0$

$\hat{Q}_1 = Q_1 \sqcup Q_1^* \sqcup \{t_i \mid i \in Q_0\}$

$\rightsquigarrow D(Q,W) = \mathbb{C}\hat{Q}$ — <u>алгебра Гинзбурга</u> — DG-алгебра

\+ градуировка : $|e_i| = 0$, $|\alpha| = 0$, $|\alpha^*| = 1$, $|t_i| = 2$

\+ дифференциал : $\partial(e_i) = 0$, $\partial(\alpha) = 0$, $t = \sum t_i$, $t_i = e_i t$

$\partial(\alpha^*) = \frac{\partial W}{\partial\alpha}$, $\partial(t) = \sum_{\alpha\in Q_1} [\alpha,\alpha^*]$

Тогда

$H_0(D(Q,W)) = A(Q,W)$ // $H_*(D(Q,W)) = \mathrm{Ker}\,\partial / \mathrm{Im}\,\partial$ — град. алгебра

$\boxed{\text{Теорема}}$ ① $D(Q, W)$ — 3-CY алгебра

② $A(Q, W)$ — 3-CY алгебра $\iff H_i(D(Q,W)) = 0 \ \forall i \neq 0$

Y — компактная риманова поверхность

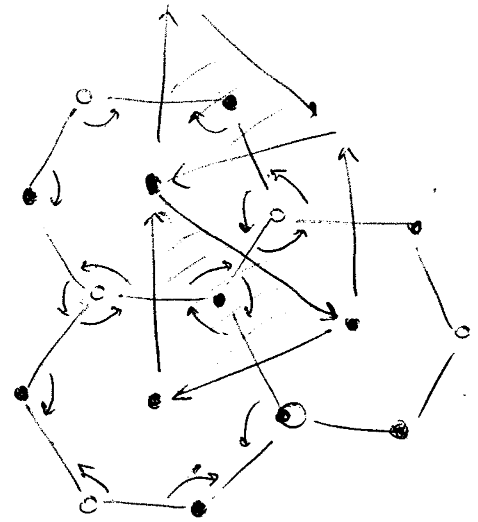
G — двудольный граф, $G \hookrightarrow Y$ — димерная модель

$G_0 = B \sqcup W$

разбивающий Y на многоугольники

G_1 — ребра, G_2 — грани.

Возьмем димерную модель



Q — двойственный граф

$Q_0 \longleftrightarrow G_2$

$Q_1 \longleftrightarrow G_1$

$Q_2 \longleftrightarrow G_0$

$\parallel$

$B \sqcup W$, грани B — по часовой стрелке, W — против

Q — колчан

$f \in Q_2$ f — белая $\rightsquigarrow (-1)^f = 1$

f — черная $\rightsquigarrow (-1)^f = -1$

Определим для $f \in Q_2$

$$\partial_{cyc} f \in \mathbb{C} Q_{cyc}$$

обход грани f

$$\rightsquigarrow W = \sum_{f \in Q_2} (-1)^f \partial_{cyc} f \text{ — потенциал}$$

$$A(G) := A(Q, W)$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Если G — алгебраически согласованная димерная модель на торе, то $A(G)$ — 3-CY алгебра

(Не)коммутативные торические алгебры

Некоммутативные торические данные

L — решетка $\quad L^\vee = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})$

I — конечное мн-во $\rightsquigarrow \mathbb{Z}^I = \{f : I \longrightarrow \mathbb{Z}\} \ni \underline{1}$ — постоянная функция

$$\mathbb{Z}_I = (\mathbb{Z}^I)^\vee \ni \sum_{i \in I} a_i i$$

решетка

$$\mathbb{Z}^I \xrightarrow{d} N \supseteq N^+ .$$

выпуклый многогранный рациональный конус

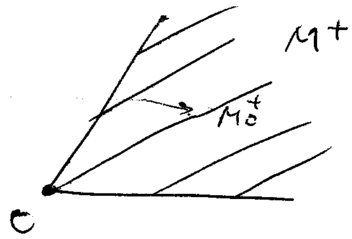
$$\mathrm{Ker}(d) = \mathbb{Z} \cdot \underline{1}$$

$$\mathbb{Z}_I \longleftarrow M \supseteq M^+$$

$$M = N^\vee, \quad M^+ = (N^+)^\vee = \{m \in M \mid \langle m, n \rangle \geq 0 \ \forall n \in N^+\}$$

$\forall i, j \in I$

$$M^+_{ij} = \partial^{-1}(i-j) \cap M^+$$



$\forall i, j \quad M_{ii}^+ = M_{jj}^+ = M_0^+ = \mathrm{Ker}(\partial) \cap M^+$

$$M^{gen} = \sum_{i,j} M^+_{ij}$$

$\mathbb{Z}^I \xrightarrow{d} N \supseteq N^+$ — некоммутативные торические данные, если

1. $M^+_{i,j} \neq \varnothing$
2. $(M_{gen})^\vee = N^+$

$$\underset{i-j}{M^+_{ij}} + \underset{j-k}{M^+_{jk}} \subseteq \underset{i-k}{M^+_{ik}}$$

$$\mathbb{C}[M^+_{ij}] \cdot \mathbb{C}[M^+_{jk}] \subseteq \mathbb{C}[M^+_{ik}] \rightsquigarrow B = \bigoplus \mathbb{C}[M^+_{ij}]$$

$$x^{m_1} \cdot x^{m_2} = x^{m_1 + m_2}$$

B — некоммутативная торическая алгебра

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{C}[M_{11}^+] & \mathbb{C}[M_{12}^+] & \dots \\ \mathbb{C}[M_{21}^+] & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

M_0^+ $\quad \mathbb{C}[M_0^+] =: R$ — торическая коммутативная алгебра

это центр B.

$|I| = 2 \quad I = \{i, j\}$

$$\mathbb{Z}^I \xrightarrow{\binom{a}{b} \longmapsto a-b} N = \mathbb{Z} \qquad M_{ij}^+$$

$$\mathbb{Z}_I \xleftarrow{(a,-a)} \mathbb{Z} \qquad \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$$

Построим по димерной модели торические данные

G — невырожденная димерная модель на Y если $\forall$ ребро входит в совершенное паросочетание (все вершины задействованы)

$H^0(Y) = \mathbb{Z}$

$H^1(Y) = \mathbb{Z}^{2g}$ $\qquad \mathbb{Z}^{Q_0} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^{Q_1} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^{Q_2}$ $\qquad$ ~~Q~~ | Q

$H^2(Y) = \mathbb{Z}$ $\qquad$ сумма без знака

$\underline{1}$

$$N = d^{-1}(\mathbb{Z}\,\underline{1})$$

$$N^+ = N \cap \mathbb{N}^{Q_1} \qquad I = Q_0$$

$$\to \quad \mathbb{Z}^{Q_0} \xrightarrow{d} N \supseteq N^+$$

$\boxed{\text{Предложение}}$ G - невырожденная $\longrightarrow$ это - некомм. торические данные

$\to B(G), R(G)$

Димерная модель G ~~[illegible]~~
невырожденная

$h: A(G) \longrightarrow B(G)$ — гомоморфизм

$p = \alpha_1 \ldots \alpha_n$

путь в Q $\rightsquigarrow [\alpha_1] + \cdots + [\alpha_n] \in \mathbb{Z}^{Q_1}$

G — алгебраически согласованная, если h — изоморфизм

геометрическая согласованность на торе

$\Downarrow$

алг. согласованность

P — совершенное паросочетание на G

$\chi_P \in \mathbb{Z}^{Q_1}$ — хар. функция паросочетания P.

На самом деле, $\chi_P \in N^+$ и $d(\chi_P) = \underline{1}$

$\rightsquigarrow \chi_P \in \underbrace{N^+ \cap d^{-1}(\underline{1})}_{\text{выпуклый решетчатый многогранник}}$

$\boxed{\text{Предложение}}$ Вершины этого многогранника = χ_P для совершенных паросочетаний P

т.е. $\rightsquigarrow \chi_P$ порождают N^+ как выпуклый конус

$\boxed{\text{Теорема}}$ G — алг. согл. димерная модель на торе $\Rightarrow A(G) = B(G)$ — 3-CY алгебра

$\boxed{\text{Предложение}}$ $\forall$ трехмерное горенштейново ~~[illegible]~~ аффинное торическое многообразие может быть получено как $\operatorname{Spec}(R(G))$, где G — геом. согласованная д.м. на торе

$\boxed{\text{Теорема}}$ G — алг. согласованная д.м. на торе
$\rightsquigarrow A(G)$ — некоммутативное крепантное (минимальное?) разрешение алгебры $R(G)$

Разр. особ. $Y \xrightarrow{f} X$ — крепантное, если $f^* \omega_X = \omega_Y$
горенштейново

$Y_1 \to X,\ Y_2 \to X \Rightarrow D^b(Y_1) \cong D^b(Y_2)$