22.11.2012

А. Ананьевский

Ориентированные теории когомологии

$A \in SH(k)$

$X \in Sm/k \rightsquigarrow A^{p,q}(X) := \varinjlim \underbrace{\mathrm{Hom}_{H_\bullet(k)}(X_+ \wedge T^i, A_i \wedge \underbrace{S^{p,q}}_{= \mathbb{G}_m^{\wedge q} \wedge S_s^{p-q}})}_{= \mathrm{Hom}_{SH(k)}(\Sigma_T^\infty X_+, A \wedge S^{p,q})}$

$A \overset{\text{спектр}}{=} (A_0, A_1, \ldots)$, $A_i \in \mathrm{Mot}$.

$+ \ \sigma_i : T \wedge A_i \to A_{i+1}$ $\qquad T = \mathbb{A}^1 / \mathbb{G}_m$

где $\Sigma_T^\infty X_+ = (X_+, T \wedge X_+, T^{\wedge 2} \wedge X_+, \ldots)$

в аксиоматике было еще требование про $A^{p,q}(X, U)$

Положим $A^{p,q}(X, U) := A^{p,q}(X/U)$

Если A — коммутативный моноид в $SH(k)$, то $A^{*,*}$ — кольцевая теория когомологий

1. $U \xhookrightarrow{i} X$ — открытое вложение

$$\rightsquigarrow \Sigma_T^\infty U \longrightarrow \Sigma_T^\infty X \longrightarrow \underbrace{\Sigma_T^\infty \mathrm{Cone}(i)}_{\cong\, \Sigma_T^\infty (X/U)} \text{ — выделенный треугольник}$$

$$\to A^{*,*}(X, U) \to A^{*,*}(X) \to A^{*,*}(U) \xrightarrow{\partial} A^{*+1,*}(X, U) \to \ldots$$

— длинная точная последовательность

2. $A^{*,*}(X \times \mathbb{A}^1) \simeq A^{*,*}(X)$, поскольку $(X \times \mathbb{A}^1)_+ \simeq X_+$ в $H_\bullet(k)$

3.
$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X' \arrow[d, "et"] \\ Z \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{A^{*,*}(X', X'-Z')}_{= A^{*,*}(X'/X'-Z')} \simeq \underbrace{A^{*,*}(X, X-Z)}_{= A^{*,*}(X/X-Z)}$$

(см. Morel–Voevodsky)

если Z гладкое, то

$\boxed{\text{Th}}$ (Homotopy Purity)

$Z \xhookrightarrow{i} X$ — замкнутое вложение гладких многообразий,

N_i — нормальное расслоение $\rightsquigarrow X/_{X-Z} \simeq N_i/_{N_i - Z}$ в $H_\bullet(k)$.

Из этой теоремы следует, что $\overbrace{A^{*,*}(X/X-Z) \simeq A^{*,*}(N_i/N_i-Z)}^{\text{для гладкого } Z}$,
и (поскольку это квадрат Нисневича) $A^{*,*}(X'/X'-Z')$ — то же самое.

Как доказывается теорема?

— деформация к нормальному конусу:

$$D(Z,X) := Bl_{Z\times\{0\}}(X\times A^1) \setminus Bl_{Z\times\{0\}}(X\times\{0\})$$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d, "i_0"] & Z\times A^1 \arrow[d] & Z \arrow[l] \arrow[d, "i"] \\
N_i \arrow[r] \arrow[d] & D(Z,X) \arrow[d] & X \arrow[l] \arrow[d] \\
\{0\} \arrow[r] & A^1 & \{1\} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Нулевое сечение

$P(N_i\oplus \mathbb{1}) \setminus P(N_i) \simeq N_i$

$$\rightsquigarrow \quad X/X-Z \longrightarrow D(Z,X)/D(Z,X)-Z\times A^1 \longleftarrow N_i/N_i-Z$$

изоморфизмы!

$\boxed{\text{Пример}}$ $\{0\} \xrightarrow{i} A^n$

$$D(0,A^n) = Bl_{\{0\}}A^{n+1} \setminus Bl_{\{0\}}A^n = \{(x,l)\mid x\in l,\ l\not\subset A^n\}.$$

$$\{(x,l)\mid x\in l\} = \mathcal{O}_{P^n}(-1) = Bl_{\{0\}}A^{n+1}, \qquad Bl_{\{0\}}A^n = \mathcal{O}_{P^{n-1}}(-1)$$

$$A^{n+1} \simeq D(0,A^n)$$

$$(l\cap\{x_{n+1}=1\},\ x_{n+1}) \longleftarrow\!\shortmid (x_1,x_2,\dots,x_{n+1},l)$$

$$\begin{tikzcd}
(l\cap\{x_{n+1}=1\}, x_{n+1}) \arrow[d, mapsto] \arrow[dr] & (x_1,\dots,x_{n+1},l) \arrow[l, mapsto] \arrow[d] \arrow[dr, mapsto] & \\
x_{n+1} & A^1 & x_{n+1}
\end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow \quad A^n/A^n-\{0\} \simeq A^{n+1}/A^{n+1}-A^1 \simeq A^n/A^n-\{0\}$$

Этот пример работает для более общей ситуации:
$E \longrightarrow X$ — векторное расслоение, $X \hookrightarrow E$ — нулевое сечение
$\Rightarrow D(X,E) \cong E\times A^1$

$A^{*,*}(-)$ — ориентированная, то есть для векторного расслоения
$E \longrightarrow X$ ранга n заданы $th(E) \in A^{2n,n}(E, E-X)$

Пусть $Z \xrightarrow{i} X$ — замкнутое вложение гладких многообразий коразмерности n

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd}
A^{*-2n,*-n}(Z) \arrow[r, "th(N_i)"] \arrow[rr, bend left, "i_A"] & A^{*,*}(N_i,N_i-Z) \arrow[r, "\simeq"] & A^{*,*}(X,X-Z)
\end{tikzcd}$$

изоморфизмы — деформация к нормальному конусу

Поэтому есть последовательность Гизина:

$$\begin{tikzcd} A^{*-2n,*-n}(Z) \arrow[r, "i_A"] & A^{*,*}(X) \arrow[r] & A^{*,*}(X-Z) \arrow[r, "\partial"] & \dots \end{tikzcd}$$

пушфорвард

гомоморфизм левых $A^{*,*}(X)$-модулей

кольцевой гомоморфизм

$$E \longrightarrow X \quad \overset{?}{\rightsquigarrow} th(E) \in A^{2n,n}(E, E-X)$$

– достаточно задать для универсального расслоения ранга n:

$$\begin{tikzcd} \tau_n \arrow[d] \arrow[r, equal] & \varinjlim_k \tau_{n,k} \arrow[d] \\ BGL_n \arrow[r, equal] & \varinjlim_k Gr(n,k) \end{tikzcd}$$

т.е. $th(\tau_n) \in A^{2n,n}(\tau_n, \tau_n - BGL_n)$

$$\| $$

$$A^{2n,n}(\tau_n/\tau_n - BGL_n) = A^{2n,n}(MGL_n)$$

пространство Тома для универсального расслоения ранга n.

т.е. $th(\tau_n) \in Hom_{SH}(\Sigma_T^\infty MGL_n[-n], A)$

MGL – спектр: $(MGL_0, MGL_1, MGL_2, \dots)$

$$\begin{tikzcd} \sigma_i : T \wedge MGL_i \arrow[r] \arrow[d, equal] & MGL_{i+1} \\ \tau_{i}+\mathbb{1}/(\tau_i+\mathbb{1}-BGL_i) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

умножение индуцируется отображениями $MGL_i \wedge MGL_j \to MGL_{i+j}$

$\rightsquigarrow MGL$ – коммутативный моноид

Далее, из $th(\tau_n)$ собирается отображение $th: MGL \longrightarrow A$ в $SH(k)$

$$\begin{tikzcd} \Sigma_T^\infty MGL_n[-n] \arrow[r] \arrow[dr] & MGL \arrow[d, dashed] \\ & A \end{tikzcd}$$

$$\eta \in \pi^{-1,-1}(pt) \qquad H: \underset{\overset{\|}{S^{3,2}}}{\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}} \longrightarrow \underset{\overset{\|}{S^{2,1}}}{\mathbb{P}^1}$$

$$(x,y) \longmapsto [x:y]$$

– если обратить этот элемент, все сильно упрощается:

$MGL_n(x)_\eta = 0$; $\quad \eta \in K^{-1,-1}(pt) = K_{-1}(pt) = 0$

$H(\quad , \mathbb{Z}[1/2])$ — SL_n-теория — как бы обратные операции

$H(\quad , \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ — ориентированная теория

$$\begin{tikzcd} MSL \arrow[r, "u\eta"] & MSL \arrow[r] & \mathrm{Cone}(u\eta) \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\ & & ? \end{tikzcd}$$

$$K \xrightarrow{H} KO \xrightarrow{u\eta} KO \longrightarrow K$$ — (алгебраическая) последовательность Ботта

$\boxed{\text{Пример}}$ $E \longrightarrow X$ — векторное расслоение

$$\begin{tikzcd} A^{*-2n,*-n}(X) \arrow[r, "\cup c_n(E)"] \arrow[dr] & A^{*,*}(X) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & A^{*,*}(E-X) \arrow[r, "\partial"] & {} \\ & A^{*,*}(E) \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

$c_n(E) := z^A(th(E))$, $\quad z: (E, \varnothing) \longrightarrow (E, E-X)$

— старший класс Черна

$\boxed{\text{Лемма}}$

$$\begin{tikzcd} X' = X \times_Y Y' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

— Все многообразия гладкие, i — замкнутое вложение, $f^* N_i \simeq N_j$

Тогда $g^A i_A^d = j_A^d f^A$.

$\boxed{\text{Лемма}}$ $p: E \longrightarrow X$ — векторное расслоение, $r: X \to E$ — нулевое сечение, $s: X \longrightarrow E$ — сечение такое, что $r(X) \pitchfork s(X) = Y$

трансверсальное пересечение

$i: Y \longrightarrow X$, $b \in A^{*,*}(X)$

$\Longrightarrow i_A i^A(b) = b \cup c_n(E)$

$$\begin{tikzcd} A^{*-2n,*-n}(Y) \arrow[r, "i_A"] & A^{*,*}(X) \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "i^A"] & A^{*,*}(X-Y) \end{tikzcd}$$

Док-во:

$$\begin{tikzcd} A^{*,*}(X) \arrow[r, "\cup th(E)"] \arrow[d, "i^A"] & A^{*+2n,*+n}(E, E-X) \arrow[r, "z^A"] \arrow[d, "s^A"] & A^{*+2n,*+n}(E) \arrow[d, shift right, "r^A"'] \arrow[d, shift left, "s^A"] \\ A^{*,*}(Y) \arrow[r, "i_A^d"] & A^{*+2n,*+n}(X, X-Y) \arrow[r, "z^A"] & A^{*+2n,*+n}(X) \arrow[u, bend right, "p^A"'] \end{tikzcd}$$

коммутативен по Лемме

коммутативен

$r^A = s^A$, так как r^A, s^A — изоморфизмы, и $p^A s^A = p^A r^A$

$$i_A i^A(b) = z^A i_A^d i^A(b) = r^A z^A(b \cup th(E)) = b \cup r^A z^A(th(E)) =$$
$$= b \cup c_n(E)$$

□

$\boxed{\text{Следствие}}$ $p: E \longrightarrow X$ — расслоение, $X \longrightarrow E$ — нигде не нулевое сечение $\Longrightarrow c_n(E) = 0$

избавились от пар $A^{*,*}(-,-)$ $\rightsquigarrow$ стало все как у Левина–Мореля.

$\boxed{\text{Теорема}}$ $$A^{*,*}(\mathbb{P}^n) \simeq A^{*,*}(pt)[t]/t^{n+1}$$
$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \longleftarrow\!\shortmid\; t$$

$\boxed{\text{Замечание}}$ если $A^{*,*}$ неориентируема, то
$$A^{*,*}(\mathbb{P}^1) \simeq A^{*-2,*-1}(pt) \oplus A^{*,*}(pt)$$
— следует из

не канонически! только — отображается канонически в $A^{*,*}(\mathbb{P}^1)$

$$\begin{tikzcd}
A^{*,*}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1 - \{\infty\}) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\wr"] & A^{*,*}(\mathbb{P}^1) \arrow[r] & A^{*,*}(\mathbb{A}^1) \arrow[l, dashed, bend left] \arrow[d, "\wr"] \\
A^{*,*}(\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^1 - \{0\}) \arrow[d, equal] & & A^{*,*}(pt) \\
A^{*,*}(T) \arrow[d, "\wr"] & & \\
A^{*-2,*-1}(pt) & &
\end{tikzcd}$$

$$(\mathbb{P}^1, \infty) \simeq T \simeq S^{2,1}$$

Док-во теоремы: Индукция, $n = 1$ — понятно

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(1) \arrow[d] \\
\mathbb{P}^n \arrow[u, dashed, bend left, "r"] \arrow[u, dashed, bend right, "s"']
\end{tikzcd}$$

нулевое

$$r(\mathbb{P}^n) \pitchfork s(\mathbb{P}^n) = \mathbb{P}^{n-1}$$

$$\begin{tikzcd}
A^{*-2,*-1}(\mathbb{P}^{n-1}) \arrow[r, tail] & A^{*,*}(\mathbb{P}^n) \arrow[r] & A^{*,*}(\mathbb{A}^n) \arrow[d, "\wr"] \\
 & & A^{*,*}(pt)
\end{tikzcd}$$

$$(1, c_1(\mathcal{O}(1)), \dots, c_1^{n-1}(\mathcal{O}(1))) \longmapsto (c_1, c_1^2, \dots, c_1^n)$$

все они приходят из $A^{*,*}(\mathbb{P}^n)$

$\rightsquigarrow$ базис в $A^{*,*}(\mathbb{P}^n)$ — $(1, i_A(\dots))$ — то, что надо.

При этом $c_1(\mathcal{O}(1))^{n+1} = c_{n+1}(\mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)}) = 0$

есть сечение

$E \to X$ — ранга n

$\boxed{\text{Следствие}}$ $$A^{*,*}(\mathbb{P}(E)) = \bigoplus_{k=0}^{n-1} A^{*-2nk,*-nk}\, c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^k$$

Док-во: локально изоморфизм — Майер-Вьеторис $\Rightarrow$ изоморфизм

□

$\boxed{\text{Опр.}}$

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^n - c_1(E)\, c_1(\mathcal{O}(1))^{n-1} + c_2(E)\, c_1^{n-2} + \dots + (-1)^n c_n(E) = 0$$

классы Черна в $A^{*,*}(X)$

$c_n(E)$ — тот же самый, что был раньше.

$\rightsquigarrow$ Можно посчитать когомологии грассманианов, классифицирующих пространств, ...

$$A^{*,*}(BGL_n) = A^{*,*}(pt)[[c_1, \dots, c_n]]$$

$$\mathbb{P}^\infty = \varinjlim \mathbb{P}^n \rightsquigarrow A^{*,*}(\varinjlim \mathbb{P}^n) \longrightarrow \varprojlim_n (A^{*,*}(\mathbb{P}^n)) \longrightarrow 0$$

$$\lim^1 A^{*-1,*}(\mathbb{P}^n) = 0$$

Поэтому $A^{*,*}(\mathbb{P}^\infty) \simeq A^{*,*}(pt)[[c_1]]$