

Пример: $\mathbb{P}^n \rightarrow \det T_p^\vee \xrightarrow{\sim} (\det T_p^\vee - \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $(\mathcal{H}(n+1))$ $\mathcal{O}(n+1)$ $\mathcal{O}(n)$

— $\mathcal{O}(n)$ -расщепление
 — SL -ориентирование
 — $\mathcal{O}(n)$ -ориентирование
 — $\mathcal{O}(n)$ -ориентирование

$\det(T_{\mathbb{P}^n}^\vee \oplus \det T_{\mathbb{P}^n}) = \det T_{\mathbb{P}^n}^\vee \otimes \det T_{\mathbb{P}^n}$

$\uparrow$
 $\mathcal{O}(n)$

Способы задать ориентацию:

$\mathcal{I}$ - Классы Тома векторных расслоений:

$\forall E/X$ пара и задает $t_h(E) \in A^{2n, n}(E, E-X)$

а) фронтальность

а) мультипликативность: $th(E_1 \oplus E_2) = p_1^* th(E_1) \vee p_2^* th(E_2)$

8) - $\cup th(E): A^{*,*}(X) \longrightarrow A^{*+2n, *+n}(E, E-X)$

II - Классы Тома линейных расслоений

$$\forall L/x \text{ — число } th(L) \in A^{2,1}(L, L-x)$$

а) функториальность

$$\sigma) - \cup \text{th}(\mathbb{1}_X): A^{*,*}(X) \longrightarrow A^{*+2, *+1}(X \times \mathbb{A}^1, X \times \mathbb{G}_m) \sim \text{cis} 040, 040-3m$$

III - Классы Черна векторных расслоений:

$\forall E/X$ 3adgen $C_i(E) \in A^{2i,i}(X)$

а) фунториальность

5) правило Картана: если $c_*(E) = 1 + c_1(E)t + c_2(E)t^2 + \dots$, то

$$C_*(E_1 \oplus E_2) = C_*(E_1) \cup C_*(E_2)$$

$$b) A^{*,*}(P_x(E)) = \bigoplus_{i \geq 0} A^{*-2i, *-i}(X) C_i(O(1))$$

$$2) C_1(\mathbb{I}pt) = 0$$

нужно E/X - пара u , $C_u(E)$ vs. $C_u(E^v)$

$$K_{\uparrow}: c_1(U) = 1 - [L^{\vee}] = (1 - [L])(-[L^{\vee}])$$

$$c_1(L^\vee) = 1 - [L]$$

отличаются на что-то
обратное

$$A^{*,*}(X) \xrightarrow{U_n(E)} A^{*+2n, *+n}(X) \rightarrow A^{*+2n, *+n}(E-X) \text{ — последовательность изгиба}$$

Tonda.

$$\begin{array}{ccccc}
 A^{*,*}(X) & \longrightarrow & A^{*+2n, *+n}(X) & \xrightarrow{j_1} & A^{*+2n, *+n}(\overline{E-X}) \\
 \parallel & & \parallel & & \uparrow \\
 A^{*,*}(X) & \longrightarrow & A^{*+2n, *+n}(X) & \xrightarrow{j_2} & A^{*+2n, *+n}(\overline{E^\vee-X})
 \end{array}$$

расслоения
с афф.
сложности
размерности
 $n-1$

гомоморфизмы $A(X)$ -модулей
+ изоморфизмы

$$\rightarrow \text{Ker}(j_1) = \text{Ker}(j_2)$$

$$\rightarrow c_n(E) A^{*,*}(X) = c_n(E^\vee) A^{*,*}(X)$$

пользуясь $\text{Gr}(n, \infty)$ — там это не делитель нуля — получаем

$$c_n(E) = \alpha \cdot c_n(E^\vee), \text{ где } \alpha - \text{обратимый}$$

IV Классы Черна линейных расслоений

$\forall L/X$ линейно — задано $c_i(L) \in A^{2,i}(X)$

а) функториальность

$$\delta) A^{*,*}(X \times \mathbb{P}^1) = A^{*,*}(X) \oplus A^{*-2, *+1}(X) c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_x}(1))$$

$$\text{в) } c_1(\mathbb{I}_{pt}) = 0$$

Если $A^{*,*}$ представима, то

V Универсальный класс Тома

— задано $th \in A^{2,1}(\tau^\infty, \tau^\infty - p^\infty)$

так, что $th|_{p^0}$ задает изоморфизм

$$- \cup th|_{p^0}: A^{*,*}(pt) \xrightarrow{\sim} A^{*+2, *+1}(A^1, \mathbb{G}_m)$$

VI Универсальный класс Черна

$c \in A^{2,1}(\mathbb{P}^\infty)$ т.ч. $c|_{p^0} = 0$ и $A^{*,*}(\mathbb{P}^1) = A^{*,*}(pt) \oplus A^{*-2, *+1}(pt) c|_{p^1}$

VII $MGL \rightarrow A$ — гомоморфизм моноидов

$$\mathbb{P}^\infty = \varinjlim_n \mathbb{P}^n$$

$$\tau^\infty_{p^\infty} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^\infty}(-1)$$

Теорема Есть естественная биекция между

- ① I, II, III, IV для любой теории когомологий
- ② $I - VI$ для представимой теории когомологий
- ③ $VI \iff I, II, V$ с дополнительными условиями нормализации

$$\begin{aligned} A^{p,q}(X) &= \text{Hom}_{SH(k)} \left(\sum_{\tau}^{\infty} X_{+}, A \wedge S^{p,q} \right) \xrightarrow{\cong} \\ &\cong \text{Hom}_{SH(k)} \left(\sum_{\tau}^{\infty} (X_{+} \wedge T), A \wedge S^{p+2, q+1} \right) = \\ &\cong A^{p+2, q+1}(X_{+} \wedge T) = \\ &= A^{p+2, q+1}(X \times A^1, X \times \mathbb{G}_m) \end{aligned}$$

Условие нормализации: $th(\mathbb{I}_{pt}) = \sum_{\tau} 1$

$I \Rightarrow III$ В прошлый раз мы научились определять классы Черна:

$$A^{*,*}(P(E)) = A^{*,*}(pt)[t] / \sum (-1)^i t^{n-i} c_i(E) \quad \text{для } E/x \text{ ранга } n$$

$$c_1(P(E)) \leftrightarrow t$$

как доказывается правило Каргана?

$$\begin{array}{ccc} P(E_1) & \longrightarrow & P(E_1 \oplus E_2) \longleftarrow U \\ & & \downarrow \\ & & P(E_2) \end{array} \quad \begin{array}{l} E_1 - \text{ранга } n \\ E_2 - \text{ранга } m \end{array}$$

$$A^{*,*}_{P(E_1)}(P(E_1)) \hookrightarrow A^{*,*}_{E_1 \oplus E_2}(P(E_1 \oplus E_2)) \longrightarrow A^{*,*}(P(E_2))$$

$$? \longmapsto \sum (-1)^i t^{n-i} c_i(E_2) \longmapsto 0$$

$$A^{*,*}_{P(E_2)}(P(E_1 \oplus E_2)) \ni \sum (-1)^i t^{n-i} c_i(E_1)$$

аналогично

$$\begin{aligned} \leadsto \left(\sum (-1)^i t^{n-i} c_i(E_2) \right) \cup \left(\sum (-1)^i t^{n-i} c_i(E_1) \right) &\in A^{*,*}_{P(E_1) \cap P(E_2)}(\dots) \\ \parallel &\parallel \\ \sum (-1)^i t^{m+n-i} c_i(E_1 \oplus E_2) & 0 \end{aligned}$$

II $\Rightarrow$ III — легко (см. предыдущий раз)

III $\Rightarrow$ IV — очевидно

IV $\Rightarrow$ II :

$$\begin{array}{ccccc} P(\mathbb{1}) & \longrightarrow & P(L \oplus \mathbb{1}) & \longleftarrow & U \\ \downarrow \scriptstyle X & & \downarrow \scriptstyle P \\ & & X & & \downarrow \\ & & & & P(L) = X \end{array}$$

$$A_x^{*,*}(P(L \oplus \mathbb{1})) \hookrightarrow A_x^{*,*}(P(L \oplus \mathbb{1})) \longrightarrow A_x^{*,*}(X)$$

$$\Big| \quad A_x^{*,*}(L, L-X) \cong c_1(O(1) \otimes P^*L) \longrightarrow c_1(L^{\vee} \otimes L) = c_1(\mathbb{1}_X) = 0$$

его и назовем $th(L)$

функториальности очевидна.

Подставим $L = \mathbb{1}_X$

$$A_x^{*,*}(P^1 \times X) \hookrightarrow A_x^{*,*}(P^1 \times X) \longrightarrow A_x^{*,*}(X)$$

$c_1(O(1))$

— судя по IV δ), он является образующим $\sim$ II δ

III $\Rightarrow$ I — примерно так же

Теперь про представимые теории

IV $\Rightarrow$ VI :

$$P^\infty = \varprojlim P^n$$

Лемма $E = \operatorname{hocolim} E(i)$ (в SH)

$$\sim 0 \longrightarrow \varprojlim^1 \operatorname{Hom}_{SH}(E(i) \wedge S^{d,0}, A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{SH}(E, A) \longrightarrow \varprojlim \operatorname{Hom}(E(i), A) \longrightarrow 0$$

Опр $\dots \xrightarrow{\varphi} G_n \xrightarrow{\varphi} G_{n-1} \xrightarrow{\varphi} \dots$ — последовательности абелевых групп $\sim$

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{\operatorname{Ker}(\operatorname{id}-\varphi)} G_i \longrightarrow \prod G_i \xrightarrow{\operatorname{id}-\varphi} \prod G_i \longrightarrow \varprojlim_{\operatorname{Coker}(\operatorname{id}-\varphi)} G_i \longrightarrow 0$$

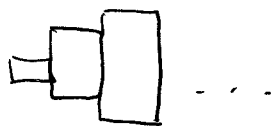
Лемма X_i — топ. пр.-ва, $X_i \hookrightarrow X_{i+1}$ — вложения, $X = \varprojlim X_i \sim$

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 H^{q-1}(X_i) \longrightarrow H^q(X) \longrightarrow \varprojlim H^q(X_i) \longrightarrow 0$$

— этого достаточно для предыдущей леммы

$$\text{tel } X_i = \bigcup_i X_i \times [i, i+1]$$

с какими-то
отображениями



$$A = X_0 \times [0, 1] \sqcup \bigsqcup_{i \geq 1} X_{2i-1} \times [2i-1, 2i] \cup X_{2i} \times [2i, 2i+1]$$

$$B = \bigsqcup_{i \geq 0} X_{2i} \times [2i+1-1, 2i+1] \cup X_{2i+1} \times [2i+1, 2i+2]$$

$$A \cap B = \bigsqcup_{i \geq 0} X_i \times [i+1-1, i+1]$$

$$H^*(A) = \prod H^*(X_{2i})$$

$$H^*(B) = \prod H^*(X_{2i+1})$$

$$H^*(C) = \prod H^*(X_i)$$

$$\begin{array}{ccccccc} H^q(\text{tel}(X_i)) & \longrightarrow & H^q(A) \oplus H^q(B) & \longrightarrow & H^q(C) & \longrightarrow & H^{q+1}(\text{tel}(X_i)) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H^q(X) & \longrightarrow & \prod H^q(X_i) & \xrightarrow{\text{id}-\varphi} & \prod H^q(X_i) & \longrightarrow & H^{q+1}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ 0 \rightarrow \varinjlim^q H^q(X_i) & \longrightarrow & \prod H^q(X_i) & \xrightarrow{\text{id}-\varphi} & \prod H^q(X_i) & \longrightarrow & \varinjlim^{q+1} H^q(X_i) \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\varinjlim^q H^q(X_i) \longrightarrow H^q(X) \longrightarrow \varinjlim H^q(X_i)$$

Лемма (Mittag-Leffler condition)

Если $\forall i \exists j \geq i \forall n > j \text{ Im}(G_n \longrightarrow G_i) = \text{Im}(G_j \longrightarrow G_i)$, то $\varinjlim^1 G_i = 0$.

В частности, если все φ_i сюръективны.

Доказ. Для сюръективных φ_i очевидно,

$$G_i' = \text{Im}(G_j \longrightarrow G_i)$$

$$0 \longrightarrow \prod G_i' \longrightarrow \prod G_i \longrightarrow \prod G_i / G_i' \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \text{id}-\varphi \quad \downarrow \text{id}-\varphi \quad \downarrow \text{id}-\varphi$$

$$0 \longrightarrow \prod G_i' \longrightarrow \prod G_i \longrightarrow \prod G_i / G_i' \longrightarrow 0$$

$$\varinjlim^1 G_i' \longrightarrow \varinjlim G_i \longrightarrow \varinjlim^1 G_i / G_i'$$

(по лемме) $\varinjlim^1 G_i' = 0$
 φ -умноженно
 $\Rightarrow \text{id}-\varphi$ обратим. $\square$

Теперь можно посчитать когомологии для P^∞ .

$$A^{*,*}(P^\infty) = \varprojlim A^{*,*}(P^n) = \varprojlim A^{*,*}[t] / t_{n+1} = A^{*,*}[[t]]$$

t -нулевой универсальный класс Чирна; можно проверить, что условия выполнены.

II $\Rightarrow$ V: аналогично для класса Тома

VI $\Rightarrow$ IV:

Теорема $\text{Hom}_{H.(k)}(X, P^\infty) \cong \text{Pic}(X)$
(X -гладкое)

$$\mathcal{U}_X \leadsto X \xrightarrow{i_X} P^\infty$$

$\leadsto c(L) := i_L^*(c)$; проверить условие нормализации...

V $\Rightarrow$ II - так же.

$$\left(\bigoplus_n \pi^{n,n}(pt)[z^{-1}] = W^0(k)[z, z^{-1}] \right)$$

$$\sum_T MGL_i[-i] \hookrightarrow MGL,$$

$$\text{hocolim } \sum_T MGL_i[-i] \simeq MGL$$

$$\sum_T MGL_i[-i] \xrightarrow{\quad} A \quad \text{соотв. классу Тома}$$

$$\text{Hom}_{SH}(MGL, A \wedge S^{p,q})$$

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 A^{p+2i, q+i}(MGL_i) \longrightarrow A^{p,q}(MGL) \longrightarrow \varprojlim A^{p+2i, q+i}(MGL_i) \longrightarrow 0$$

$$\parallel$$

$$0$$

$$MGL_1 = \tau^\infty / \tau^\infty_{-p^\infty}$$

$$A^{*,*}(MGL_1) = A^{*,*}(pt)[[c]] \text{ th}$$

$$A^{*,*}(MGL_2) = A^{*,*}[[c_1, c_2]] \text{ th}$$

$$\begin{array}{c} \psi \\ \text{th} \\ \swarrow \\ \text{поднимается до } A^{p,q}(MGL) \end{array}$$

$$\downarrow \\ MGL \longrightarrow A$$