$\boxed{29\ 11.2012}$

$\boxed{\text{Лемма}}$ k — бесконечное поле

А. Ананьевский

$X/_k$ — гладкое многообразие, $x \in X$ — замкнутая точка,

$U = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[u, bend left, "\Delta"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{X}$ — существенно гладкая схема над k

сечение p

Z/U — конечное, $\Delta(x) \in Z$

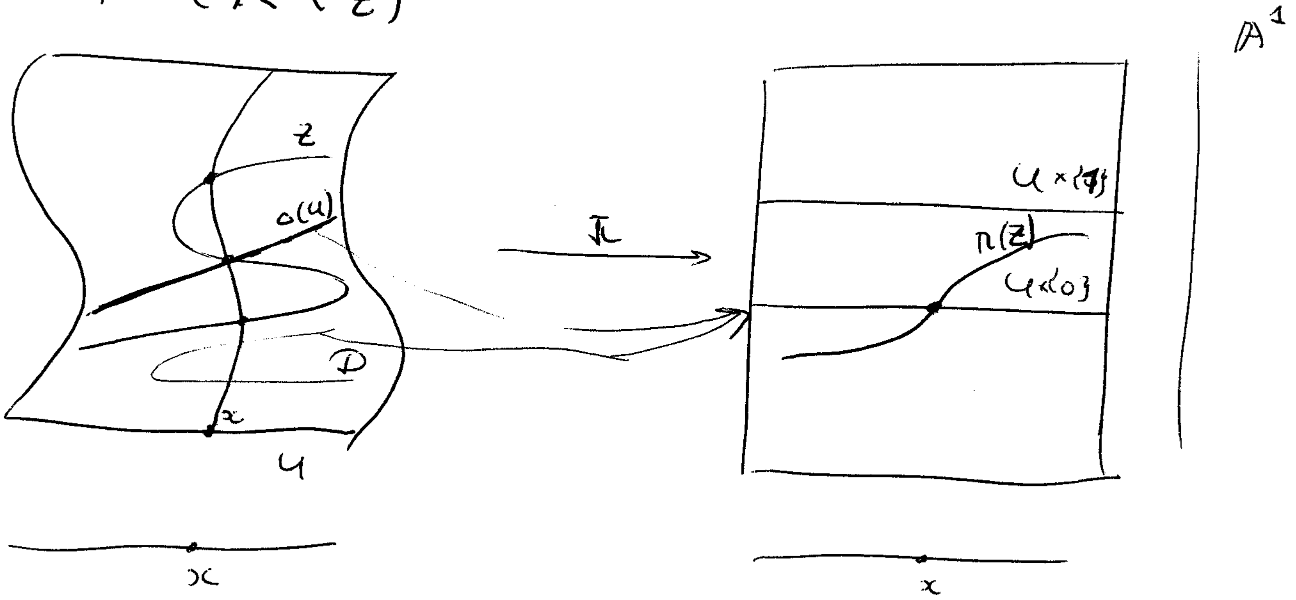
$p^{-1}(x)$ гладко над $k(x)$ в $p^{-1}(x) \cap Z$

и $\exists$ конечный сюръективный морфизм

$\mathcal{X} \longrightarrow U \times \mathbb{A}^1$ схем над U

Тогда $\exists\, \pi : \mathcal{X} \longrightarrow U \times \mathbb{A}^1$ такой, что

1. π — конечный и сюръективный
2. π этальный в $Z \cap p^{-1}(x)$
3. $\pi^{-1}(U \times \{0\}) = \Delta(U) \sqcup D$, $D \subset (\mathcal{X} - Z)$
4. $\pi^{-1}\pi(Z) = Z \sqcup Z'$, $Z' \subset (\mathcal{X} \setminus \Delta U)$
5. $\pi^{-1}(U \times 1) \subset (\mathcal{X} \setminus Z)$



Лемма A — локальное регулярное кольцо, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ — макс. идеал. R — существенно гладкая k-алгебра, $i: A[t] \longrightarrow R$ — вложение, $R/A[t]$ — конечный модуль.

Расщепление $\varepsilon: R \longrightarrow A$ (для $A \longrightarrow R$), $I = \ker(\varepsilon)$, радикальный идеал $\mathcal{Y} \trianglelefteq R$ такой, что $\mathcal{Y} \subset I + \mathfrak{m}R$, $R/\mathcal{Y}$ конечно над A, $R/\mathfrak{m}R$ гладкая над $A/\mathfrak{m}$ в простых идеалах, содержащих $\mathcal{Y} + \mathfrak{m}R$

Тогда существует $s \in R$:

1. $R/A[s]$ конечно
2. R — эталоная над $A[s]$ в макс. идеалах, содержащих $\mathcal{Y}$
3. $R/sR = R/I \times R/I'$ для некоторого $I' \trianglelefteq R$ т.ч. $I' + \mathcal{Y} = R$
4. $R/(A[s] \cap \mathcal{Y})R \simeq R/\mathcal{Y} \times R/\mathcal{Y}'$ для некоторого $\mathcal{Y}' \trianglelefteq R$ т.ч. $\mathcal{Y}' + I = R$
5. $(s-1)R + \mathcal{Y} = R$

$R/\mathcal{Y}$ полулокально $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{m}_0 = I + \mathfrak{m}R, \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_e$ — макс. идеалы

$\bar{\alpha} \in R/\mathfrak{m}$: $\bar{\alpha} \in \overline{\mathfrak{m}_i} \setminus \overline{\mathfrak{m}_i}^2$ $\rightsquigarrow$ поднимаем до $\alpha \in R$

$\bar{\alpha} = \overline{\alpha - \varepsilon(\alpha)}$ $\Leftarrow$ $\alpha \in \mathfrak{m}_0 = I + \mathfrak{m}R$ $\rightsquigarrow \varepsilon(\alpha) \in \mathfrak{m}$

$\Downarrow$

Можно считать, что $\alpha \in I$

k^* ~~[illegible]~~ [точнее]

$\boxed{\alpha + \mathfrak{m}_i = r_i + \text{локальный параметр}}$

R — цело над $A[t]$, $\rightsquigarrow \alpha^n + p_1(t)\alpha^{n-1} + \ldots + p_n(t) = 0$

$$s = \alpha - \left(t \prod q_i(t)\right)^N \qquad N \gg 0$$

~~[illegible]~~ $q_i(t)$ — минимальные многочлены $t + \overline{\mathfrak{m}_i} \in R/\overline{\mathfrak{m}_i}$, унитальные

$s + \mathfrak{m}_i = \alpha + \mathfrak{m}_i$

$\rightsquigarrow$ ~~[illegible]~~ — из выбора $q_i(t)$

$\alpha = s + \left(t \prod q_i\right)^N$ — подставим

$\rightsquigarrow$ получится соотношение целой зависимости для t над $A[s]$ $\rightarrow$ 1

Проверим 2: $A[s] \hookrightarrow R$ — вложение существенно гладких k-алгебр

$R/A[s]$ — конечно $\Rightarrow$ R — строго плоский над $A[s]$

③: $\exists W \subset \operatorname{Spec}(R/sR)$ — окрестность $\mathfrak{m}_0$ т.ч.

~~$W \to \operatorname{Spec} A$ этально, $J \leq \mathfrak{m}_0$, $s \in J$~~

В общем, остальные точки из $p^{-1}(x)$ не переходят в O.

④ — тоже из того, что это локальный параметр (в первом — этальность, второе следует)

⑤ — можно добиться линейной заменой переменных. $\square$