Теоремы типа Коннера–Флойда

20.12.2012

А. Ананьевский

$\boxed{\text{Теорема}}$ ① $MGL^{*,*}(X)\otimes_{MGL^{2*,*}(pt)}K_0(pt)\xrightarrow{\sim}K_*(X)$

② $MSp^{*,*}(X)\otimes_{MSp^{4*,2*}(pt)}KO^{[2*]}_{\bullet}(pt)\xrightarrow{\sim}KO_*^{[*]}(X)$

③ $MSL^{*,*}(X)/_{(\eta-1)}\otimes_{MSL^{4*,2*}(pt)}W^{2*}(pt)\xrightarrow{\sim}W^*(X)$

Классический результат Коннера–Флойда:

$\Omega_u^*(X)\otimes_{\Omega_u^*(pt)}K_*(pt)\simeq K_*(X)$, X — клеточное

$\Omega_{Sp}^*(X)\otimes_{\Omega^*_{Sp}(pt)}KO_*(pt)\simeq KO_*(X)$

---

① $BGL\in SH(k)$ — спектр, представляющий K-теорию:

а) $BGL^{i,j}(X)\xrightarrow{\sim}K_{2j-i}(X)$

б) $BGL^{*,*}(X)=BGL^{*,0}(X)[\beta,\beta^{-1}]$, где $\beta\in BGL^{2,1}(pt)$ — элемент Ботта

в) $BGL_i\simeq\mathbb{Z}\times Gr(\infty,\infty)$ в $H_\bullet(k)$

$\rightsquigarrow$ есть отображение спектров $MGL\longrightarrow BGL$

$\rightsquigarrow$ $MGL^{*,*}(X)\longrightarrow BGL^{*,*}(X)=\bigoplus BGL^{*,0}(X)[\beta,\beta^{-1}]=K_*(X)[\beta,\beta^{-1}]$

② $BO\in SH(k)$ — спектр, представляющий KO:

а) $BO^{i,j}(X)\simeq KO^{[j]}_{2j-i}(X)$

б) $BO^{i,j}(X)\xrightarrow{\cup\beta_3}BO^{i+8,j+4}(X)$ — изоморфизм, где $\beta_3\in BO^{8,4}(pt)$

в) $BO_2\in KSp\simeq\mathbb{Z}\times HGr(\infty,\infty)$ в $H_\bullet(k)$

$\left(HGr(2k,2n)=Sp_{2n}/Sp_{2k}\times Sp_{2n-2k}\right)$

$\rightsquigarrow$ есть отображение спектров $MSp\longrightarrow BO$

$\rightsquigarrow$ $MSp^{*,*}(X)\longrightarrow BO^{*,*}(X)$

③ $BO_\eta^{*,*}(X)\simeq W^*(X)[\eta,\eta^{-1}]$

$\rightsquigarrow$ $MSL^{*,*}(X)\longrightarrow BO^{*,*}(X)$

$\rightsquigarrow$ $MSL_\eta^{*,*}(X)/_{(\eta-1)}\longrightarrow BO_\eta^{*,*}(X)/_{(\eta-1)}\simeq W^*(X)$

$$MSp^{*,*}(X) \otimes_{MSp^{4*,2*}(pt)} BO^{4*,2*}(pt) \longrightarrow BO^{*,*}(X)$$

$$\Vert$$

$$\overline{MSp}^{*,*}(X) \underset{s}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} BO^{*,*}(X)$$

1. Придумаем s для индексов $(4,2)$

$BO^{4,2}(X) \longrightarrow \overline{MSp}^{4,2}(X)$. Будем подставлять туда разные X (даже мотивные пространства).

$BO^{4,2}(-) \longrightarrow MSp^{4,2}(-)$ на $H_\cdot(k)$

представим: $= \mathrm{Hom}_{H_\cdot(k)}(-, KSp)$

Поэтому достаточно выбрать $s \in \overline{MSp}^{4,2}(KSp)$

$$\overline{MSp}^{*,*}(KSp) = \left(MSp^{*,*}(pt)[[b_1, b_2, b_3, \dots]]_h\right)^{\times\mathbb{Z}} \otimes_{MSp^{4*,2*}(pt)} BO^{4*,2*}(pt)$$

классы Бореля, однородные ряды

$$s = (b_1)_{i\in\mathbb{Z}} \otimes 1 + (i)_{i\in\mathbb{Z}} \otimes H$$

число $\in MSp^{0,0}(pt)$

$H \in BO^{4,2}(pt)$ класс гиперболической плоскости

$BO^{4,2}(X) = KO_0^2(X) = GW^2(X)$ = „K_0 построенный по симплектическим расслоениям"

S дает сечение; т.е., $\varphi \circ s = id$

$$\overline{MSp}^{4,2}(X) \longrightarrow BO^{4,2}(X)$$

$$b_1^{MSp}(E,\varphi) \longmapsto b_1^{BO}(E,\varphi) := [E,\varphi] - \frac{rk(E)}{2}\cdot H$$

Отправим $b_1^{BO}(E,\varphi) \longmapsto b_1(E,\varphi)\otimes 1$

$H \longmapsto 1 \otimes H$

2. Придумаем $s : BO^{8i+4,4i+2}(X) \longrightarrow \overline{MSp}^{8i+4,4i+2}(X)$

$\alpha = a \cup \beta_8^i$, $a \in BO^{4,2}(X)$

$\alpha \longmapsto s(a) \cup (1 \otimes \beta_8^i)$

3. Теперь $\overline{MSp}^{8i+4,4i+2}(X) \longrightarrow BO^{8i+4,4i+2}(X)$ сюръективно, поскольку есть сечение. — для любого мотивного пространства

Инъективность:

$\boxed{\text{Опр.}}$ X — малое мотивное пространство с отмеченной точкой, если $\mathrm{Hom}_{SH(k)}(\Sigma_T^\infty X, -)$ коммутирует с копроизведениями

Пример: ① X — гладкое многообразие $\Rightarrow X_+$ — малое пространство

② $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ B \arrow[r] & Y \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$
i — мономорфизм, A, X, B — малые $\Rightarrow Y$ — малое

Пусть $\alpha \in \overline{MSp}^{8i+4,4i+2}(X)$, $\varphi(\alpha) = 0$

Для простоты будем считать, что $\alpha = a \otimes b$, $a \in MSp^{4n,2n}(X)$, $b \in BO^{8i-4n+4,4i-2n+2}(pt)$

X — малое $\Rightarrow MSp^{4n,2n}(X) = \varinjlim Hom_{H.(k)}(X \wedge T^m, MSp_{2n+m})$

$\rightsquigarrow a = f^*(th(E_{2n+2d}, \varphi))$,

$f : X \wedge T^{\wedge 2d} \longrightarrow MSp_{2n+2d}$

$th(E_{2n+2d}, \varphi) \in MSp^{2n+2d}(MSp_{2n+2d})$

$n + d = n'$
можно считать, что n' нечетно

$$\begin{tikzcd}
\overline{MSp}^{4n',2n'}(MSp_{2n'}) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\varphi"] & \overline{MSp}^{4n',2n'}(X \wedge T^{\wedge 2d}) \arrow[d, "\varphi"] \\
BO^{4n',2n'}(MSp_{2n'}) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "s"] & BO^{4n',2n'}(X \wedge T^{\wedge 2d}) \arrow[d, "s"] \\
\overline{MSp}^{4n',2n'}(MSp_{2n'}) \arrow[r, "f^*"] & BO^{4n',2n'}(X \wedge T^{\wedge 2d})
\end{tikzcd}$$

$$th \otimes b \longmapsto \alpha \longmapsto 0 \longmapsto 0, \qquad th \otimes b \longmapsto\ ?\ \longmapsto 0$$

$MSp^{*,*}(MSp_{2n'})_\eta = MSp^{*,*}(pt)[[b_1, b_2, \dots, b_{n'}]]_h$

$MSp_{2n'}$ — пространство Тома над $BSp_{2n'} = HGr(2n'; \infty)$

$BO^{*,*}(MSp_{2n'}) = BO^{*,*}(pt)[[b_1, b_2, \dots, b_{n'}]]_h$

$\Rightarrow$ т. верна в универсальном случае для диагонали $(4,2)$

$\longrightarrow$ слева φ, s — изоморфизмы $\longrightarrow\ ? = th \otimes b \longrightarrow \alpha = 0$

$\longrightarrow \varphi$ — изоморфизм для индексов $(8i+4, 4i+2)$.

$$\begin{array}{ccc} \overline{MSp}^{8i+4,4i+2}(X \wedge S^1_s) & \simeq & BO^{8i+4,4i+2}(X \wedge S^1_s) \\ \wr\mid & & \wr\mid \\ \overline{MSp}^{8i+3,4i+2}(X) & \simeq & BO^{8i+3,3i+2}(X) \end{array}$$

Таким образом, получаем ответ для $\overline{MSp}^{*,4i+2}$

Аналогично, пользуясь надстройкой $\wedge \mathbb{G}_m$:

$$BO^{i,j}(X) \simeq BO^{i+1,j+1}(X \wedge \mathbb{G}_m),$$

получаем изоморфизм для любых индексов.

$$\begin{tikzcd}
MSL_\eta^{*,*}(X) \otimes_{MSL^{4*,2*}(pt)} BO_\eta^{4*,2*}(pt) \arrow[r] & BO_\eta^{*,*}(X) \arrow[equal, d] \arrow[l, bend left, "\text{сечение}"] \\
MSp_\eta(X) \otimes_{MSp^{4*,2*}} BO^{4*,2*}(pt) \arrow[u] \arrow[ur, "\sim"] & W^*(X)[\eta,\eta^{-1}]
\end{tikzcd}$$