$\boxed{21.02.2013}$

В. Петров

G — алг. группа $/F$

X — G-однородное проективное многообразие

$M(X)_{\mathbb{Z}/p}$ мотив Чжоу p — простое число

$\rho \in CH^{\dim X}(X\times X)/_p : \quad \rho\circ\rho = \rho$

- найти $\rho_1,\dots,\rho_n : \sum \rho_i = \Delta_X, \; \rho_i\circ\rho_j = \delta_{ij}\rho_i$

„разложение мотива"

① - есть теорема Крулля–Шмидта:
разложение на неразложимые единственно

② Мы знаем полностью, как устроено $CH^*(\overline{X})$
Как абелева группа, это $\oplus\mathbb{Z}$,
и известно, как считать умножение

<u>Теорема нильпотентности Роста</u>

$\operatorname{Ker}\left(CH^*(X\times X) \longrightarrow CH^*(\overline{X}\times\overline{X})\right)$ состоит из нильпотентных элементов.

Следствие: если $\overline{\rho} \in CH^*(\overline{X}\times\overline{X})$ — проектор, то ρ можно подправить на ρ' т.ч. $\overline{\rho}' = \overline{\rho}$, и ρ' - тоже проектор

③ На $X\times X$ есть фильтрация по орбитам G:
не гладкие!

$$\begin{array}{ccccccccc}
X\times X & \supset & X_1 & \supset & X_2 & \supset & \dots & \supset X_{i+1} \supset & \Delta_X \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{A}^{r_0}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{A}^{r_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{A}^{r_i}} & & \\
 & & Y_0 & & Y_1 & & Y_i & &
\end{array}$$

где все Y_i — проективные, G-однородные

$\rightsquigarrow M(X\times X) = \bigoplus M(Y_i)\{r_i\}$

В частности, $CH^*(X\times X) = \bigoplus CH^{*-r_i}(Y_i)$
„явное" равенство

<u>Примеры:</u>

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n & \supset & \mathbb{P}^n \\
\downarrow{\scriptstyle \mathbb{A}^1} & & \\
Fl_{1,2} & &
\end{array}$$

квадрика

$$\begin{tikzcd}
Q \times Q \arrow[r, phantom, "\supset"] & \{\langle u\rangle, \langle v\rangle \mid q(u+v)=0\} \arrow[d, "pr_1"] \arrow[r, phantom, "\supset"] & Q \arrow[d, "\mathbb{A}^1"'] \\
 & Q & \mathrm{IsoFl}_{1,2}
\end{tikzcd}$$

$$q(u+v)=0 \iff q|_{\langle u,v\rangle}=0$$

В жизни G-многообразия не всегда проективные однородные:

$\langle\langle a, b\rangle\rangle \quad x^2 - ay^2 - bz^2 + ab\,t^2 = c$

$\rightsquigarrow \langle\langle a, b\rangle\rangle \perp \langle -c\rangle : \quad x^2 - ay^2 - bz^2 + ab\,t^2 = cu^2$ — компактификация

Еще пример: A — ц.п.а. степени 3

$\{Nrd = c\}$ — есть компактификация: не является однородным.

Как расширить класс многообразий, сохранив теоремы?

Вариант: Goresky – Kottwitz – MacPherson Inv, 1998
„Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem"
— GKM-многообразия.

В G есть две части: корни + тор

самое интересное в плане действия

Пусть поле теперь замкнуто

$T = \mathbb{G}_m \times \ldots \times \mathbb{G}_m$

Возьмем многообразие X:

1. X — гладкое проективное
2. На X действует T а) с конечным числом неподв. точек:

   $X^T = \bigsqcup$ кон. числа точек

   б) одномерных T-орбит конечное число

   (неподв. точек отн-но действия подтора коразмерности 1)

Проективные однородные — частный случай

G/B Неподвижных точек $|W|$ штук: wB = неподв. точки:

$$twB = w(w^{-1}tw)B = wB$$

Упражнение: $tgB = gB \Rightarrow gB = wB$

$$t x_\alpha(u) B = x_\alpha(u) \underbrace{(x_\alpha(u)^{-1} t x_\alpha(u))}_{= t} B$$

для t из подтора

$\langle t, x_\alpha, x_{-\alpha}\rangle = SL_2 \rightsquigarrow SL_2/B$ дает $\mathbb{P}^1$

GKM-граф:

вершины = неподвижные точки

ребра = одномерные T-орбиты

Оказывается, каждое ребро соединяет две вершины

$\downarrow$

Из этой картинки читается эквивариантное кольцо $CH^*_T(X)$

Пусть $p_1, \dots, p_N$ — неподвижные точки. Тогда

1. $CH^*_T(X) \longrightarrow \bigoplus_i CH^*_T(pt)$ инъективно

$$CH^*_T(pt) = S^*(X^*(T)) = \mathbb{Z}[\chi_1, \dots, \chi_r]$$

$\rightsquigarrow$ в каждой вершине можно поставить по многочлену — это и будет элемент $CH^*_T(X)$

Чему равен образ?

2. Каждое ребро задает уравнение:

$p_1 \bullet \!\!-\!\!-\!\!\bullet\, p_2$ ← соответствует характеру тора α

Уравнения: многочлены в вершинах ~~[illegible]~~ связаны так: ~~отражение [illegible] по α~~

$\cancel{f_{p_1} \; [illegible]}$ $f_{p_1} - f_{p_2}$ делится на α

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Uparrow$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad X^*(T)$

$$CH^*_T(X) = CH^*((X \times ET)/T)$$

$BT = (p \times ET)/T \quad \forall$ неподвижной $p \in X$

$\coprod BT \qquad\qquad X \times_T ET$

$$p_i \hookrightarrow \bar{e} \hookleftarrow p_j$$

$$(BT)_i \sqcup (BT)_j \hookrightarrow (\bar{e} \times ET)/T$$

$$\downarrow$$

$$(X \times ET)/T$$

$$\coprod_{p \in X^T} BT \hookrightarrow \bar{e} \times_T ET \hookrightarrow X \times_T ET$$

разность $= \coprod (BT)_\alpha$ (α-ребра из графа)

разность когомологически тривиальна (?!)

CH^* восстанавливается из CH^*_T:

$$CH^*(X) = CH^*_T(X) \,/\, X^*(T)\, CH^*_T(X)$$

$\rightarrow$ над замыканием мы все контролируем.

Хочется доказать • нильпотентность Роста
• теорему Крулля–Шмидта
• есть ли какая-то фильтрация на $X \times X$ в общем случае?
(посмотреть сначала на торические многообразия)

Гиперплоское сечение E_7/P_7, например, лежит в этом классе, как и его мини-аналог: компактификация многообразия Меркурьева – Суслина.