



E_7 - 56-мерное представление: $[U(P_8), U(P_8)] = (E_7, \omega_7)$

M_4 -градуировка на (E_7, ω_7)

Возьмем (E_7, ω_7) , реализованное корнями внутри E_8 и смотрим на коэффициенты при α_4 по модулю 4

$$56 = 16 + 12 + 16 + 12$$

Рассмотрим, как (E_7, ω_7) распадается при ограничении на $SL_4 \times SL_4$

$$M_4(F) \oplus M_4(F) \oplus \dots$$

(16) (16)

Пусть V - 4-мерное векторное пр-во:

$$\text{End}_e(V) \oplus \text{End}_f(V^*) \oplus \underbrace{\bigwedge^2 V}_u \oplus \underbrace{\bigwedge^2 V}_v \oplus \underbrace{(\bigwedge^2 V^*)_s}_s \oplus \underbrace{(\bigwedge^2 V^*)_t}_t$$

56 переменных разбиваем на четыре блока

$$g(x) = \frac{1}{24} [[[[e, x], x], x], x] \quad \sim \text{4-форма}$$

$$\det(e) + \det(f) + \text{tr}((ef)^t)^2 / 2 - \text{tr}(ef^t)^2 / 4 +$$

- надо выбрать базис в $\bigwedge^2 V$ (и $\bigwedge^2 V^*$ соответственно) $\rightarrow u \wedge v$ - скаляр

// по сим. и $28 + 28$: $28 = 8 \cdot 7$ - кососимм. матрицы 8×8

$$Pf(x) + Pf(y) + \text{tr}((xy)^2)^2 / 4 - (\text{tr}(xy))^2 / 16$$

$x = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e^* & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & f \\ f^* & 0 \end{pmatrix}$

$$+ (s \wedge t + u \wedge v)^2 / 4 + (s \wedge s - v \wedge v)(u \wedge u - t \wedge t) +$$

$$+ \sum_{i,j,k} u_{ij} s_{ik} (f_{1i} f_{23} - f_{13} f_{2i} - e_{42} e_{34} + e_{32} e_{44})$$

$$+ \sum u_{12} u_{42} (-ef^t)_{32} + \sum u_{12} v_{34} (-ef^t)_{44} - (ef^t)_{33} + (ef^t)_{22} + (ef^t)_{11}$$

Хочется получить „инвариантную“ запись этого.

На $\Lambda^2 V$ есть квадратичная форма $h: u \mapsto u \wedge u$
(если выбран элемент объема)

→ это 6-мерный модуль с квадр.-формой: $\Phi_3 (= A_3)$

- но ничто не заставляет брать тривиальную алгебру Титса, т.е. брать квадратичную, а не эрмитову Φ_3

- и ничто не заставляет брать тривиальный дискриминант: можно взять внешнюю Φ_3 .

Первое: вместо квадр. формы на 6-мерном модуле возможен квадратичный H с канонической инволюцией: Антиэрмитова форма $\checkmark$ на H^3 , не обяз. с тривиальным disc (так получаются все Φ_3 , в т.ч. внешние) (Второе)

Сначала возможен с тривиальным дискриминантом (или нет?)

$$\leadsto C_0(h) \oplus H^3 \oplus (H^3)^*$$

$h \mapsto$ инволюция на $M_3(H)$

↑
есть канонич. инволюция

↓
четная алгебра Клиффорда:
фактор тенз. алгебры $M_3(H)$
по соотношениям:

(второго рода)

т.е. $C_0(h)$ — ц.п.а. степени 4

над расширением K/F (квадратич.)

↓
disc

$$u \otimes u - q(u) \cdot 1$$

$$v \otimes u \otimes u \otimes w - q(u) v \otimes w$$

- можно их записать в терминах σ

Надо теперь переписать нашу γ -форму в терминах $h, C_0(h), \dots$

В рассужденной ситуации $H = M_2(F)$, $H^3 \hookrightarrow \Lambda^2 V \oplus \Lambda^2 V$

Каноническая инволюция на $M_2(F)$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$h((u, v), (u', v')) = \begin{pmatrix} v \wedge u' & v \wedge v' \\ -u \wedge u' & -u \wedge v' \end{pmatrix}$$

$$h: H^3 \times H^3 \longrightarrow H$$

$$\text{Посмотрим на } \det(h((u, v), (u, v))) = -(u \wedge v)^2 + (u \wedge u)(v \wedge v)$$

$$\text{tr}(h((u, v), (u, v)) \cdot h((t, s), (t, s))) = 2(u \wedge v)(t \wedge s) - (u \wedge u)(s \wedge s) - (v \wedge v)(t \wedge t)$$

Но из них не составляется то, что нужно

Что с остальными выражениями? Нужно внимательно
почитать книгу Шиволомус про изоморфизм $A_3 \cong D_3$

$$\chi^2 : C_0(h) \longrightarrow \dots$$

очень похоже на $\chi(f_{11}f_{23} - f_{13}f_{21} - e_{42}e_{34} + e_{32}e_{44})$

$$\text{End}(V) \curvearrowright \wedge^2 V$$

- тупо: $A(u \wedge v) = Au \wedge Av$

- интеллектуально: $A(u \wedge v) = Au \wedge Av + u \wedge Av$

↑ это похоже на последнюю пару
слагаемых в 4-форме

$$(e, f)$$

$$\downarrow$$

$$(f^t, e^t)$$

$$\begin{aligned} & \rightsquigarrow ef^t, fe^t \\ & \text{tr}(\underbrace{\text{tr}(ef^t + fe^t)}) \\ & \quad \uparrow \\ & \quad K \end{aligned}$$