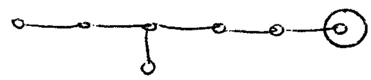
25.04.2013

В. Петров

E_7 :



J — йорданова алгебра $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \alpha & j \\ j' & \beta \end{pmatrix}$

$N = \dots$ — 4 форма

+ симплект. форма $\rightsquigarrow E_7$ (изотропная)

Как построить неизотропную E_7? (у которой есть 56-мерное представление, т.е. алг. Титса тривиальна)

Титс: A — ц.п.а. степени 4; μ — скаляр

$\rightsquigarrow$ можно построить группу типа E_7 с трив. алг. Титса

Гипотетически ее инвариант Роста $= [A] \cup (\mu)$

Цели: 1 явно нарисовать 4-форму

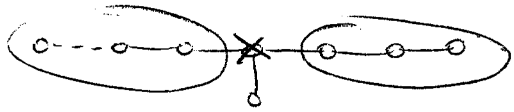
2 посчитать инвариант Роста

3 обобщить

$A \longleftrightarrow A_3$ или

D_3 (внутренняя)

$? \longleftrightarrow$ внешняя D_3



$A_3 + A_3 + A_1 < E_7$

надо взять расщепимую E_7, нарисовать форму, разбить ее на соотв. блоки. После этого — спуск Галуа.

Фрейденталь: 2 кососимметр. матрицы 8×8 a, b

$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \to 56$

$$Pf(a) + Pf(b) + \frac{tr((ab)^2)}{4} - \frac{(tr(ab))^2}{16} \quad (A_7\text{-конструкция})$$

$$a = \begin{pmatrix} u & e \\ -e^T & s \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} v & f \\ -f^T & t \end{pmatrix}$$

Stembridge: x, y — кососимметрические

$\rightsquigarrow Pf(x+y) = Pf(x) + (\text{под-пфаффианы } x) \cdot (\text{под-пфаффианы } y) + Pf(y)$

$$Pf(a) = \underbrace{Pf\begin{pmatrix} 0 & e \\ -e^T & 0 \end{pmatrix}}_{= \det(e)} + \boxed{\sum (\text{миноры } 3 \times 3\ e) \cdot (\text{коэфф. } u + \text{коэфф. } s)} + \dots$$

таких нет

$$+\sum (\text{миноры } 2\times 2\ e)\cdot(\text{коэфф. } u)\cdot(\text{коэфф. } s)$$

$$+\boxed{\sum (\text{коэфф. } e)\left(Pf(u)\,(\text{коэфф. } s)+Pf(s)\cdot(\text{коэфф. } u)\right)}$$ таких тоже нет

$$+Pf\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & s\end{pmatrix} = Pf(u)\cdot Pf(s)$$

Ответ:

$\boxed{e,f}$
$$\det(e)+\det(f)+\frac{tr((ef^T)^2)}{2}-\frac{(tr(ef^T))^2}{4}$$

$\boxed{u,v,s,t}$
$$Pf(u)Pf(s)+Pf(v)Pf(t)+\frac{tr((uv)^2)}{4}-\frac{(tr(uv))^2}{16}+\frac{tr((st)^2)}{4}-\frac{(tr(uv))^2}{16}-\frac{tr(uv)\,tr(st)}{8}$$

$\boxed{\text{смесь } e,f,u,v,s,t}$
$$\sum(\Lambda^2 e)\cdot s_{..}\cdot u_{...}$$
$$+\sum(\Lambda^2 f)\cdot t_{..}\cdot v_{...}$$
$$-tr(ef^Tuv)-tr(e^Tfst)$$
$$-\frac{tr(ete^Tv)}{2}-\frac{tr(ufsf^T)}{2}$$
$$+\frac{\left(tr(uv)+tr(st)\right)tr(ef^T)}{4}$$

Хочется все это проинтерпретировать в терминах анизотропной A_3 $(=D_3)$ или (еще лучше) ${}^2A_3$ $(={}^2D_3)$

$\underline{A_3}$ $e\in A$, $f\in A^{op}$ (или A) $(u,v)\in Q^3$, $(s,t)\in (Q^3)^\times$

e	16
f	16
u,v,s,t	24

$A^{\otimes 2} = M_4(Q)$ ← кватернионы

$\lambda^2 A = M_3(Q)$

$A\times A^{op}$ – алгебра над $F\times F$ с инволюцией II рода

$\lambda^2(A\times A^{op})$ ~ на ней есть другая инволюция II рода

ее неподв. точки — D — дискриминантная алгебра над базовым полем с ортог. инволюцией