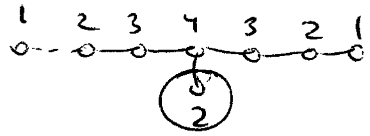
16.05.2013

A_7-конструкция Фрейденталя

В. Петров



$SL_8/\mu_2 \le E_7^{sc}$

у E_7 есть 56-мерное представление

у A_7 — 28-мерное $\quad \Lambda^2 : (A_7; \omega_2)$

кососимметр. матрицы 8×8

$(A_7, \omega_2) \oplus (A_7, \bar\omega_2)$, $\quad a \in (A_7, \omega_2)$, $\quad b \in (A_7, \bar\omega_2)$

$x \in SL_8 \longrightarrow \begin{array}{l} x\cdot a = x a x^t \\ x\cdot b = (x^t)^{-1} b x^{-1} \end{array}$

$$pf(a) + pf(b) + \frac{1}{4}tr((ab)^2) - \frac{1}{16}(tr(ab))^2$$

— инвариант SL_8 степени 4

— инвариант E_7 на самом деле.

Хотим построить анизотропную E_7.

Нужно использовать скрутку

Так мы построим E_7 из образа

$$\underline{H^1(F, SL_8/\mu_2)} \longrightarrow H^1(F, E_7^{sc})$$

нетривиально!

— конструкция по ц.п. алгебре степени 8 и экспоненты 2

— так получаем, как правило, анизотропную E_7

(Эллисон: процесс Кэли–Диксона для структ. алгебр)

отсюда видно, что инвариант Роста у нее будет 2-кручением

(а хочется 4-кручение (на самом деле, (2)))

$\lambda \in H^1(F, SL_1(A)) \rightsquigarrow$ инв. Роста должен быть

$[A] \cup (\lambda) \in H^3(F, \mu_2)$

$A_3 + A_3 + A_1$-конструкция:

$$(SL_4 \times SL_4 \times SL_2)/\mu_4 \longleftrightarrow (SL_4 \times SL_4)/\mu_2 \le SL_8(\mu_2)$$

Идея: взять SL_8-инв. формулу, расписать в терминах $SL_4 \times SL_4$ и посмотреть, как действует SL_2.

В конце закручиваем.

$$a=\begin{pmatrix} u & e \\ -e^T & s\end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} v & f \\ -f^T & t\end{pmatrix}$$

(A_3,ω_2) $\qquad$ $(A_3,\omega_1)\otimes(A_3',\omega_3)$

$$x=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta\end{pmatrix}. \qquad a\longmapsto\begin{pmatrix} \alpha u\alpha^T & \alpha e\delta^T \\ -\delta e^T\alpha^T & \delta s\delta^T\end{pmatrix}$$

(A_3',ω_2)

$$b\longmapsto\begin{pmatrix} (\alpha^T)^{-1}v\alpha^{-1} & (\alpha^T)^{-1}f\delta^{-1} \\ -(\delta^T)^{-1}f^T\alpha^{-1} & (\delta^T)^{-1}t\delta^{-1}\end{pmatrix}$$

e,f: $\quad \det(e)+\det(f)+\dfrac{tr((ef^T)^2)}{2}-\dfrac{(tr(ef^T))^2}{4}$

u,v,s,t: $\quad \underbrace{pf(u)pf(s)+pf(v)pf(t)}+\underbrace{\dfrac{tr((uv)^2)}{4}}+\underbrace{\dfrac{tr((st)^2)}{4}}-\underbrace{\dfrac{tr(uv)\,tr(st)}{8}}-\underbrace{\dfrac{(tr(uv))^2}{16}}-\underbrace{\dfrac{(tr(st))^2}{16}}$

Осталось: $\underbrace{-tr(ef^Tuv)}-\underbrace{tr(e^Tfst)}-\underbrace{\dfrac{tr(ete^Tv)}{2}-\dfrac{tr(ufsf^T)}{2}}+$

$+\dfrac{(tr(uv)+tr(st))\,tr(ef^T)}{4}$

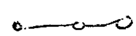
+ ещё 2 слагаемых: $\underbrace{(\Lambda^2 e)\ldots s\ldots u+(\Lambda^2 f)\ldots t\ldots v}$

- Как действует SL_2?
- Скрутить
  - действие SL_2 коммутирует с действием $SL_4\times SL_4$

на $(A_3,\omega_1)\otimes(A_3',\omega_3)$ — тривиально

$(A_3,\omega_2)\oplus(A_3,\omega_2)=(A_3,\omega_2)\otimes F^2$ ← тут действует SL_2

Слагаемые с e,f так и остаются

Данные над F: A — ц.п.а. степени 4 ← 

(или антиэрмитова форма ранга 3 над кватернионами Q с канонической инволюцией) ← 

$$\begin{pmatrix} 6 & 16 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 16 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

A $\qquad$ A

Q^3 $\qquad$ Q^3

$[Q] = 2[A]$

$SL_2(F) \rightsquigarrow SL_1(Q)$

$$\underset{\substack{16\\(e)}}{A} \oplus \underset{\substack{16\\(f)}}{A^{op}} \oplus \underset{\substack{12\\(w)}}{Q^3} \oplus \underset{\substack{12\\(z)}}{Q^3}$$

$$A \otimes A^{op} \longrightarrow End(A)$$

$$Nrd(e) + Nrd(f) + Tr((e\otimes f)^2)/2 - (Tr(e\otimes f))^2/4$$

$+ ?$

$V : \dim V = 4$

$\rightsquigarrow$ на $\Lambda^2 V$ почти что есть квадр. форма:

$$\Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \longrightarrow \Lambda^4 V \cong F$$

$$Q^3 = \Lambda^2 V \oplus \Lambda^2 V$$

Надо придумать $\varphi : Q^3 \longrightarrow F$

так что, в частности, $\varphi(wq) = \varphi(w)$ $\forall q \in SL_1(Q)$ — таких много

$\lambda^2 A$ — алгебра степени 6

$= M_3(Q)$

$$A \longrightarrow \lambda^2 A$$

$\lambda^2 A$ действует на Q^3

$A = End(V)$

$\lambda^2 A = End(\Lambda^2 V)$

прямое слагаемое в $A^{\otimes 2}$