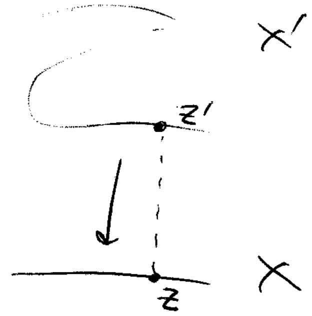
21.02.2013

И. А. Панин

Эталное вырезание

$$\begin{array}{ccccc} x\in Z' & \overset{\text{замкн.}}{\hookrightarrow} & X' & \supset \mathcal{U}' \ni x & \\ \| \quad \| & & \downarrow \pi & & \\ x \in Z & \overset{\text{замкн.}}{\hookrightarrow} & X & \supset \mathcal{U} \ni x & \end{array}$$

— эталный морфизм гладких аффинных многообразий



Рассмотрим

$$\lim_{\overrightarrow{x\in \mathcal{U}}} \frac{\mathcal{F}(\mathcal{U}-Z)}{\mathrm{Im}(\mathcal{F}(\mathcal{U}))} \longrightarrow \lim_{\overrightarrow{x\in \mathcal{U}'}} \frac{\mathcal{F}(\mathcal{U}'-Z)}{\mathrm{Im}(\mathcal{F}(\mathcal{U}'))},$$

где $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с трансферами, т.е. $\mathcal{F}: Cor/k \to Ab$

для $\mathcal{U} \hookrightarrow X$ можно брать $\mathcal{U}' = \pi^{-1}(\mathcal{U})$

Теорема (эталное вырезание):

это отображение — изоморфизм

$$\mathcal{F}(V-Z) \to \mathcal{F}(\mathrm{Spec}\, k(X))$$

инъекция

$$\mathcal{F}(V)$$

$$\sim \quad \begin{array}{c} V-Z \hookrightarrow \mathrm{Spec}\, k(X) \\ \searrow \quad \swarrow \\ V \end{array}$$

$\mathrm{Im}\,\mathcal{F}(\mathcal{U}) \to$ росток $\mathcal{F}$ в точке x

$V' := \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X',x}$ $\qquad V := \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,x}$

$$\rightsquigarrow \qquad \frac{\mathcal{F}(V-Z)}{\mathcal{F}(V)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{F}(V'-Z)}{\mathcal{F}(V')}$$

Комментарий

если предположить, что $\mathcal{F}$ — пучок с трансферами, то

$$\underbrace{\mathcal{F}(V) \hookrightarrow \mathcal{F}(V-Z)} \longrightarrow H^1_Z(V,\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(V,\mathcal{F})$$

$\| \leftarrow V$ локально

0

$$\frac{\mathcal{F}(V-Z)}{\mathcal{F}(V)} = H^1_Z(V,\mathcal{F})$$

когомологии Зарисского

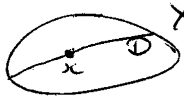
$$\downarrow \wr$$

$$\frac{\mathcal{F}(V'-Z)}{\mathcal{F}(V')} = H^1_Z(V',\mathcal{F})$$

— для когомологий Нисневича этот изоморфизм имеет место (вырезание Нисневича), не только локально, но и глобально

А для когомологий Зарисского это тоже вполне естественное свойство.

Ближайшая цель



X — гладкое аффинное

$\mathbb{G}_m := \mathbb{A}^1 \setminus 0$

$\mathcal{U} = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,x}$, D — гладкий дивизор

Опр. $\mathcal{F}_{-1}(Y) := \dfrac{\mathcal{F}(Y\times \mathbb{G}_m)}{\mathcal{F}(Y\times \mathbb{A}^1)} = \dfrac{\mathcal{F}(Y\times \mathbb{G}_m)}{\mathcal{F}(Y)}$

Тогда

$$\boxed{\frac{\mathcal{F}(\mathcal{U}-D)}{\mathcal{F}(\mathcal{U})} \underset{\text{can}}{\simeq} \mathcal{F}_{-1}(D)}$$

Комментарий

Пусть $\mathcal{F}$ — пучок

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U}-D) \longrightarrow H^1_D(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})}$$

$$\rightsquigarrow\ H^1_D(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \frac{\mathcal{F}(\mathcal{U}-D)}{\mathcal{F}(\mathcal{U})} \xrightarrow[\text{can}]{\sim} \mathcal{F}_{-1}(D)$$

Более того, если $\operatorname{codim}_{\mathcal{U}} Z = r$ и Z — гладкое, то $\boxed{H^r_Z(\mathcal{U},\mathcal{F}) \underset{\text{can}}{\cong} \mathcal{F}_{-r}(Z)}$ Изоморфизм Тома

Пример

K_i^Q — почти предпучок с трансферами

$\underline{\underline{K}}_i^Q$ — пучкование

$$\rightsquigarrow\ H^r_Z(\mathcal{U}, \underline{\underline{K}}_r) = (\underline{\underline{K}}_r)_{-r}(Z) = \underline{\underline{K}}_0(Z) = \mathbb{Z}$$

Комментарий

$$\mathcal{F}_{-1} = \Omega_{\mathbb{G}_m}(\mathcal{F}) \overset{def}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(\underbrace{\mathbb{G}_m^{\wedge 1}}_{\substack{\| \\ \mathbb{G}_m/pt}}, \mathcal{F})$$

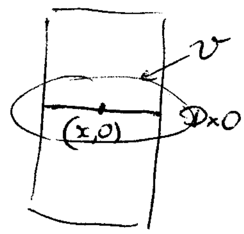
Опр. $\underline{\mathrm{Hom}}(S,\mathcal{F})$:

$$\underline{\mathrm{Hom}}(S,\mathcal{F})(Y) = \mathcal{F}(Y\times S)$$

$$\rightsquigarrow\ \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{G}_m,\mathcal{F})(Y) = \mathcal{F}(Y\times\mathbb{G}_m)$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{G}_m/pt,\mathcal{F})(Y) = \mathcal{F}(Y\times\mathbb{G}_m)/\mathcal{F}(Y\times pt) = \mathcal{F}(Y\times\mathbb{G}_m)/\mathcal{F}(Y)$$

$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[r, hook] \arrow[dr, equal] & \mathbb{G}_m \arrow[d] \\ & pt \end{tikzcd}$$



Как достичь цели?

X, X' — локальны по условию

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, hook] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[rr, bend left, equal] & X' \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho\text{ — эт.}"] \arrow[ddr, bend right, "\rho_{\mathcal{V}}"'] & D \arrow[l, hook'] \arrow[dr] & \\
x\in D \arrow[r, hook] & X & D\times\mathbb{A}^1 & D\times 0 \arrow[l, hook'] \arrow[d, equal] \\
& & \mathcal{V} \arrow[u, "i"'] & D\times 0 \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

$D = \pi^{-1}(D)$

$$\underset{\substack{\| \\ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{D\times\mathbb{A}^1,\{x,0\}})}}{\mathcal{V}} = \rho(X') \overset{\text{откр.}}{\hookrightarrow} D\times\mathbb{A}^1$$

$$\begin{tikzcd}
& \dfrac{\mathcal{F}(X'-D)}{\mathcal{F}(X')} & & \\
\dfrac{\mathcal{F}(X-D)}{\mathcal{F}(X)} \arrow[ur, "\pi^*", "\sim"'] & & \dfrac{\mathcal{F}(\mathcal{V}-D\times 0)}{\mathcal{F}(\mathcal{V})} \arrow[ul, "\rho_{\mathcal{V}}^*"', "\sim"] \arrow[d, equal] & \dfrac{\mathcal{F}(D\times\mathbb{G}_m)}{\mathcal{F}(D\times\mathbb{A}^1)} \arrow[l, "i^*"'] \arrow[ulll, "\rho^*"'] \arrow[dl, "\sim", "j_W^*"'] = \dfrac{\mathcal{F}(D\times\mathbb{G}_m)}{\mathcal{F}(D)} \\
& & \lim\limits_{0\in W} \dfrac{\mathcal{F}(W-D\times 0)}{\mathcal{F}(W)} &
\end{tikzcd}$$

$$\frac{\mathcal{F}(D\times\mathbb{G}_m)}{\mathcal{F}(D)} = \mathcal{F}_{-1}(D)$$

Этальное вырезание
$\Downarrow$
это изоморфизмы

Нужно теперь подставить $X \rightsquigarrow \mathcal{U}$, $X' \rightsquigarrow \mathcal{U}'$, $\mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{D} \cap \mathcal{U}$

Осталось показать, что i^* — изоморфизм —

Теорема вырезания для $\mathcal{D} \times \mathbb{A}^1$

Теорема Пусть

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook, "\text{откр.}"'] & \mathcal{D} \times \mathbb{A}^1 \\ \mathcal{D} \times 0 \arrow[u, hook, "\text{з.}"] \arrow[ur, hook, "\text{з.}"'] & \end{tikzcd}$$

($\mathcal{D}$ — лок. гладкая)

$\mathcal{F} : Cor \to \mathcal{A}b$ — гомотоп. инв. предпучок с трансферами

Тогда $\dfrac{\mathcal{F}(W - \mathcal{D}\times 0)}{\mathcal{F}(W)} \xleftarrow{\sim} \dfrac{\mathcal{F}(\mathcal{D}\times \mathbb{G}_m)}{\mathcal{F}(\mathcal{D}\times\mathbb{A}^1)}$ ⟵ „глобальные" объекты

„локальные" объекты

$$\mathcal{F}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{V} - \mathcal{D}\times 0) \longrightarrow H^1_{\mathcal{D}\times 0}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \longrightarrow \underset{0}{\overset{}{H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})}}$$

$$H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F}) = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\mathcal{F}(\mathcal{V} - \mathcal{D}\times 0)}{\mathcal{F}(\mathcal{V})} = H^1_{\mathcal{D}\times 0}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}\times\mathbb{A}^1) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D}\times\mathbb{G}_m) \longrightarrow H^1_{\mathcal{D}\times 0}(\mathcal{D}\times\mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{D}\times\mathbb{A}^1, \mathcal{F})$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}\times\mathbb{A}^1) = \mathcal{F}(\mathcal{D}), \qquad H^1(\mathcal{D}\times\mathbb{A}^1, \mathcal{F}) = H^1(\mathcal{D}, \mathcal{F}) = 0$$

вырезание

$$\rightsquigarrow \quad H^1_{\mathcal{D}\times 0}(\mathcal{D}\times\mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \cong \frac{\mathcal{F}(\mathcal{D}\times\mathbb{G}_m)}{\mathcal{F}(\mathcal{D})}$$

Теорема дает достижение цели!

$$\begin{tikzcd} & (\mathcal{U}', \mathcal{D}) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & & \\ (\mathcal{U}, \mathcal{D}) & & (\mathcal{V}, \mathcal{D}\times 0) \arrow[r, hook, "i"] & (\mathcal{D}\times\mathbb{A}^1, \mathcal{D}\times 0) \end{tikzcd}$$

— из этой диаграммы все получилось

почему канонический? Пусть $(\mathcal{U}'', \mathcal{D})$ — еще один такой домик

Рассмотрим категорию таких домиков: $\alpha : \mathcal{U}'' \to \mathcal{U}'$ — морфизм, если α эталeн и $\alpha|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$

① Категория домиков направленна ② $\underbrace{(\mathcal{U}'', \mathcal{D}) \text{ „тоньше" } (\mathcal{U}', \mathcal{D})}_{\exists\alpha} \Rightarrow can' = can''$

т.е. для $\alpha : (\mathcal{U}'', \mathcal{D}) \longrightarrow (\mathcal{U}', \mathcal{D})$ имеем $can' = can''$:

$$\frac{\mathcal{F}(\mathcal{U}-\mathcal{D})}{\mathcal{F}(\mathcal{U})} \overset{can'}{\underset{can''}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}_{-1}(\mathcal{D})$$

$$\begin{tikzcd}
 & \dfrac{\mathcal{F}(\mathcal{U}'-\mathcal{D})}{\mathcal{F}(\mathcal{U}')} & & \\
\dfrac{\mathcal{F}(\mathcal{U}-\mathcal{D})}{\mathcal{F}(\mathcal{U})} \arrow[ur, "\pi^*", "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"'] & & \dfrac{\mathcal{F}(\mathcal{V}-\mathcal{D}\times 0)}{\mathcal{F}(\mathcal{V})} \arrow[ul, "\rho_v^*"', "\sim"] \arrow[dl, "\sim"] & \dfrac{\mathcal{F}(\mathcal{D}\times \mathbb{G}_m)}{\mathcal{F}(\mathcal{D}\times \mathbb{A}^1)} = \mathcal{F}_{-1}(\mathcal{D}) \arrow[l, "i^*"', "\sim"] \\
 & \dfrac{\mathcal{F}(\mathcal{U}''-\mathcal{D})}{\mathcal{F}(\mathcal{U}'')} & &
\end{tikzcd}$$

$$\underset{(-2)}{[\to 0} \longrightarrow \underset{(-1)}{0} \longrightarrow \underset{(0)}{\mathcal{F}^N} \longrightarrow \underset{(1)}{0} \longrightarrow \underset{(2)}{0} \to] \in DM^-(k)$$

<u>Теорема</u> $H^i_{Nis}(X, \tilde{\mathcal{F}}) = Hom_{DM^-(k)}(M(X), \tilde{\mathcal{F}}[i])$

гладкое многообразие

$$\tilde{\mathcal{F}}[i] = (\cdots \to \underset{(-i-1)}{0} \to \underset{(-i)}{\tilde{\mathcal{F}}} \longrightarrow \underset{(-i+1)}{0} \to \cdots]$$

Имеет ли место вырезание для H_{Nis}? Да, поскольку оно имеет место в $DM^-(k)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}' \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d, "\pi"] & Z \arrow[l, hook'] \arrow[d, equal] \\
\mathcal{U} \arrow[r, hook] & X & Z \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

— квадрат Нисневича

(X' – этальная окрестность Z)

$$\begin{tikzcd}
\text{Хотим: } H^i_{\cancel{Nis},Z}(X', \tilde{\mathcal{F}}) \arrow[r, phantom, "="] & Hom_{DM^-(k)}\left(\dfrac{M(X')}{M(X'-Z)}, \tilde{\mathcal{F}}[i]\right) \\
H^i_Z(X, \tilde{\mathcal{F}}) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, phantom, "="] & Hom_{DM^-(k)}\left(\dfrac{M(X)}{M(X-Z)}, \tilde{\mathcal{F}}[i]\right) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Изоморфизм, поскольку $\dfrac{M(X')}{M(X'-Z)} \xrightarrow{\sim} \dfrac{M(X)}{M(X-Z)}$

а это верно по общим свойствам категории мотивов:

$$\begin{tikzcd}
M(U') \arrow[r] \arrow[d] & M(X') \arrow[r] \arrow[d] & M(X')/M(U') \arrow[d] \\
M(U) \arrow[r] & M(X) \arrow[r] & M(X)/M(U)
\end{tikzcd}$$

$$\to M(U') \to M(U)\oplus M(X') \to M(X) \to M(U')[1]$$

треугольник

выделенный треугольник ⤳ изоморфизм

как-то!

правильно писать не фактор, а конус

Например, в обычной топологии

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & X' \arrow[d, hook] \\
U \arrow[r, hook] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_*(U') \arrow[r] \arrow[d] & C_*(X') \arrow[r] \arrow[d] & \frac{C_*(X')}{C_*(U')} \arrow[d] \\
C_*(U) \arrow[r] & C_*(X) \arrow[r] & \frac{C_*(X)}{C_*(U)}
\end{tikzcd}$$

$$C_*(U') \to C_*(U)\oplus C_*(X') \to C_*(X) \to C_*(U')[1]$$

— точный Δ

$$h^i_D(X) \to h^i_D(N_{X/D})$$

деформация к нормальному расслоению

а posteriori верно следующее:

① $\mathcal{F}(U-D) = \mathcal{F}^{\sim}_{Nis}(U-D)$

② $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}^{\sim}_{Nis}(U)$ $\Rightarrow$

$$\frac{\mathcal{F}(U-D)}{\mathcal{F}(U)} \xrightarrow[\sim]{} \mathcal{F}_{-1}(D)$$

$$\|$$

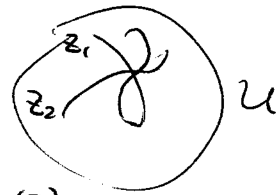
$$H^1_D(U,\mathcal{F}^{\sim}) = \frac{\mathcal{F}^{\sim}(U-D)}{\mathcal{F}^{\sim}(U)}$$

$$\|$$

$$\mathrm{Hom}_{DM^-(k)}\big(\underbrace{M(U-D)/M(U)}_{\| \atop M(D)(1)[2]}, \mathcal{F}^{\sim}_{Nis}[1]\big)$$

можно применить т. о деформации к нормальному конусу

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \arrow[dl] \\
& \mathcal{F}(\mathcal{U}) \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & \mathcal{F}^{\sim}(\mathcal{U}) \arrow[dl] & \\
& & \mathcal{F}(k(\mathcal{U})) \arrow[d, "\Sigma \partial_z"] & & \\
& & \bigoplus\limits_{z \in \mathcal{U}^{(1)}} \mathcal{F}_{-1}(k(z)) & &
\end{tikzcd}$$



$$\begin{tikzcd}
& k(z) \\
\mathcal{O}_{\mathcal{U},z} \arrow[ur] \arrow[r, hook] & k(\mathcal{U})
\end{tikzcd}$$

$$(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,z}) - z \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,z}$$
$$\| $$
$$\operatorname{Spec} k(\mathcal{U})$$

Частный случай:

$$\frac{\mathcal{F}(k(\mathcal{U}))}{\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathcal{U},z})} \xrightarrow[\sim]{\partial_z} \mathcal{F}_{-1}(k(z))$$

$$\to 0 \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathcal{U},z}) \longrightarrow \mathcal{F}(k(\mathcal{U})) \longrightarrow \mathcal{F}_{-1}(k(z)) \longrightarrow 0$$

— а мы это видели: например,

$$0 \longrightarrow Br(\mathcal{O}_{\text{к.д.н.}}) \longrightarrow Br(K) \longrightarrow \;?\; \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^2_{et}(\mathcal{O}, \mu_n) \longrightarrow H^2_{et}(K, \mu_n) \xrightarrow{\partial} H^1_{et}(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^2_{et}(\mathcal{O}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \longrightarrow H^2_{et}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \longrightarrow H^1_{et}(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$
$$\|$$
$$\operatorname{Hom}(Gal(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$