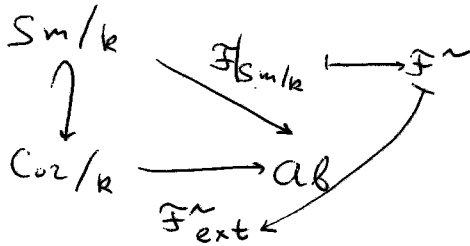


Удверждение
 $F: \text{Cor}/k \longrightarrow \text{ab}$ — предпучок с трансферами

 $\Rightarrow \tilde{F}_{\text{Nis}} := \tilde{F}^{\sim}$ снабжается (и единственным образом) трансферами


так, что канонический морфизм предпучков

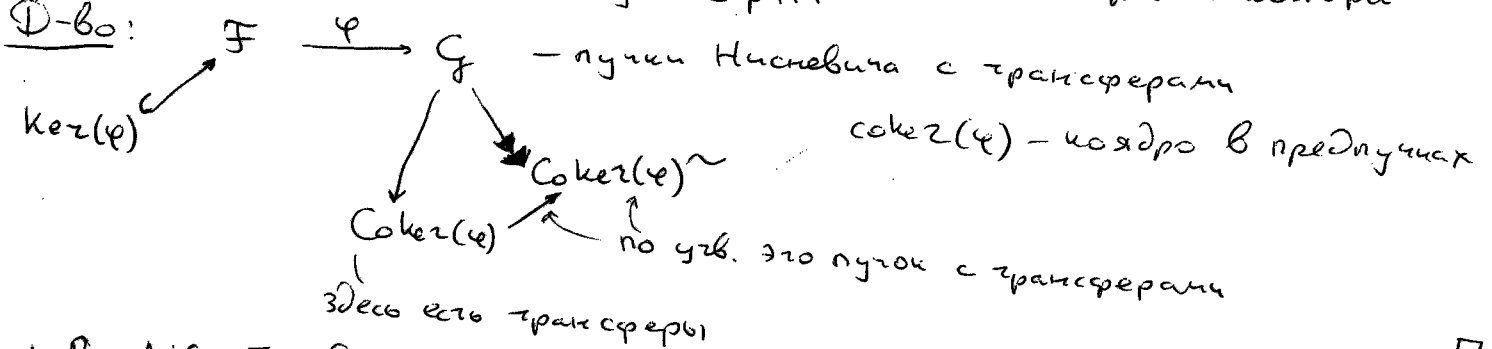
$$\tilde{F} \longrightarrow \tilde{F}^{\sim}$$

является морфизмом предпучков с трансферами

 для Cor
это неверно!
Следствие
 Категория NS_{WT} является абелевой!

Нисиевичи стр-ми

есть ядра и коядра

До-во:

 + В NS_{WT} достаточно много инъективных $\leadsto$ есть гомологич. алгебра
 $\leadsto D^-(NS_{\text{WT}})$ — производная категория ограниченных сверху пучков Нисиевича с трансферами

$$\mathcal{DM}^-(k) = \left\{ A^\bullet \mid \begin{array}{l} \underline{h}^i(A^\bullet) \text{ — гомологически инверсионные} \\ \text{пучки } \forall i, \\ \text{т.е. } \underline{h}^i(x) \xrightarrow{\sim} \underline{h}^i(x \otimes A^1) \end{array} \right\}$$

категория мотивов Воеводского

$$\begin{array}{ccccccc} A^\bullet & \longrightarrow & B^\bullet & \longrightarrow & C^\bullet & \longrightarrow & A^\bullet[1] \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \\ \mathcal{DM}^-(k) & & \mathcal{DM}^-(k) & & & & \end{array} \Rightarrow C^\bullet \in \mathcal{DM}^-(k)$$

Есть функтор

$$c_*: D^-(NS_{\text{WT}}) \longrightarrow \mathcal{DM}^-(k): \Delta^{n-1} \hookrightarrow A^n$$

 $F \in NS_{\text{WT}} \leadsto c_*(F)$ — комплекс пучков:

$$\begin{array}{ccccccc} c_n(F)(U) & \xrightarrow{\partial_0, \partial_1, \partial_2} & \dots & \xrightarrow{\partial_0, \partial_1} & c_1(F)(U) & \xrightarrow{\partial_0, \partial_1} & c_0(F)(U) \\ \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\ F(\Delta^n \times U) & & & & F(\Delta^1 \times U) & & F(U) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \hookrightarrow & A^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n & \hookrightarrow & A^{n+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \{\sum x_i = 1\} & & \end{array}$$

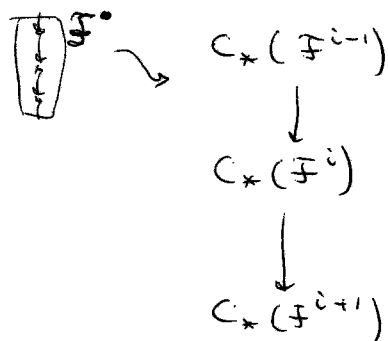
 у этого комплекса предпучки $U \mapsto h^i(U)$ — гомологически инверсионны
 (Упражнение!)

Кроме этого, они являются предпуками с трансферами

$\leadsto U \longmapsto \underline{h}^i(U)$ — гомотопически инвариантны

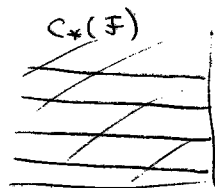
$\leadsto C_*(F) \in DM^-(k)$

Далее нужно распространить эту конструкцию на комплексы:
 ↙ бикомплекс



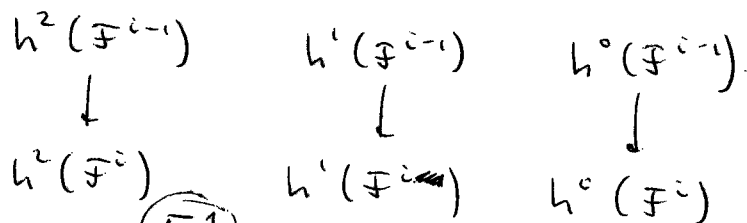
$\leadsto$ Возьмем $Tot(C_*(F^\bullet))$

Он лежит в $DM^-(k)$



гомотопически инвариантны

Спектральная последовательность:



Хотим знать, что

$h^p(Tot(C_*(F^\bullet)))$ — гомотопически инвариантны

Лемма Категория гомотопически инвариантных пучков
 Ниемича с трансферами абелева

Пусть $F, G \in NSW T$ — гомотопически инвариантны

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi) \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow \operatorname{Coker}(\varphi) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi)(X \times A^1) \longrightarrow F(X \times A^1) \longrightarrow G(X \times A^1) \longrightarrow \operatorname{Coker}(\varphi)(X \times A^1) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi)(X) \longrightarrow F(X) \longrightarrow G(X) \longrightarrow \operatorname{Coker}(\varphi)(X) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi) \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow \operatorname{Coker}(\varphi) \longrightarrow 0$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $\operatorname{Im}(\varphi)$
 $\swarrow \quad \searrow$
 $0 \quad 0$

Достаточно доказать, что для любой точной последовательности

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{NSWT}$$

с гомологически инвариантными A и B пучок C тоже гомологически инвариантен

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A(X \times A^1) & \longrightarrow & B(X \times A^1) & \longrightarrow & C(X \times A^1) \longrightarrow H^1(X \times A^1, A) \longrightarrow H^1(X \times A^1, B) \\ & & \uparrow \mathbb{Z} & & \uparrow \mathbb{Z} & & \uparrow \mathbb{Z} \\ 0 & \longrightarrow & A(X) & \longrightarrow & B(X) & \longrightarrow & C(X) \longrightarrow H^1(X, A) \longrightarrow H^1(X, B) \end{array}$$

будет доказано позже

Доказано, таким образом, что для любого ограниченного спектра комплекса $F^\bullet$ в $\mathcal{NSWT}$ комплекс $c_*(F)$ лежит в $DM^-(k)$

Теорема $F^\bullet \longrightarrow G^\bullet$ — квазиизоморфизм в $K^-(\mathcal{NSWT})$

$\Rightarrow c_*(F^\bullet) \longrightarrow c_*(G^\bullet)$ — квазиизоморфизм в $K^-(\mathcal{NSWT})$

Поэтому c_* задает функтор $D^-(\mathcal{NSWT}) \longrightarrow DM^-(k)$

$$X \in Sm/k$$

$$\text{Обозначим } \mathbb{Z}_{tr}(X)(u) := \text{Cor}(u, X)$$

т.е. $\mathbb{Z}_{tr}(X)$ — предпучок на Cor , представленный X .

Лемма $\mathbb{Z}_{tr}(X)$ — пучок Нисневича (и даже пучок на $(Sm/k)_{\acute{e}t}$)

Следствие $\mathbb{Z}_{tr}(X) \in \mathcal{NSWT}$

Опр. $M(X) := c_*(\mathbb{Z}_{tr}(X)) \in DM^-(k)$

M задает функтор $Sm/k \longrightarrow DM^-(k)$

Теорема (позже) $A^\bullet \in DM^-(k)$ — "категория мотивных комплексов" (еще одно название)

$$H_{Nis}^i(X, A^\bullet) = \text{Hom}_{DM^-(k)}(M^*(X), A^\bullet[i])$$

$A^\bullet \not\equiv I^\bullet$ — гипергомологии со значениями в $A^\bullet$:
— квазиизоморфизм в категории пучков Нисневича (без трансферов)

$$H^i(\Gamma(X, I^\bullet))$$

В топологии: Y — CW-комплекс

Категория мотивов от CW-пространств $= D^-(Ab)$

$$CW \longrightarrow D^-(Ab)$$

$$Y \longmapsto C_*(Y) = M^{top}(Y):$$



$$\mathbb{Z}[Y]$$

$$① Y_1 \cup Y_2 = Y \leadsto$$

$$C_*(Y_1 \cup Y_2) \longrightarrow C_*(Y) \oplus C_*(Y_2) \longrightarrow C_*(Y) \longrightarrow \text{треугольник}$$

$$② C_*(Y) \xrightarrow{\sim} C_*(Y \times [0, 1])$$

$$③ C_*(pt) \simeq (\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots)_{(0)}$$

$$\mathbb{Z}[Y] / \mathbb{Z}[y]$$

групповое пополнение $S^\infty(Y)$

$$\bigcup_{n \geq 0} S^n(Y)$$

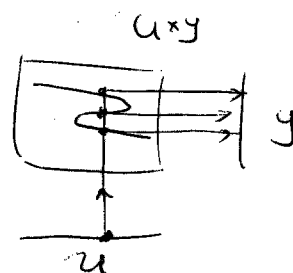
симм. степени

это аналогично $\mathbb{Z}_2(X)$:

$$\bigcup_{n \geq 0} S^n(Y) \longrightarrow \{y_1, \dots, y_n\}$$

примечание

функции Σ в $U \times Y$
конечный и соразмерный
над U



Теорема Дольда-Томас:

$$\pi_n(S^\infty(X, x)) = H_n(X)$$

$\parallel$

$$\pi_n(\text{Sing}_*(S^\infty(X, x)))$$

$\parallel$ симплициальная
абелева группа

гомологии ассоциированного комплекса

групповое пополнение $S^\infty(X)$ обозначим через $S^\infty(X)_{gr. попл.}$

$$\text{Sing}_*(S^\infty(X)_{gr. попл.}) \cong \text{Sing}_*(X) \cong C_*(X)$$

$$\Delta^i \rightarrow S^i(X) \xleftarrow{\text{и.б.}} \text{и.б.} \xrightarrow{\text{и.б.}} S^\infty(X)$$

и.б. — изоморфизм

$\rightarrow$ отсюда следует т. Дольда-Томас

Углеродные молекулярные комплексы

$$\mathbb{Z}(0) = C_* (\underbrace{\mathbb{Z}_{t2}(\text{Spec}(k))}_{\text{пост. изом } \mathbb{Z}}) = (-\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0)$$

(-3) (-2) (-1) (0)

~~$$C_* (\mathbb{Z}_{t2}(\mathbb{G}_m))$$~~

$$A^1 - 0 = \mathbb{G}_m$$

$$C_* (\underbrace{\text{Ker} [\mathbb{Z}_{t2}(\mathbb{G}_m) \rightarrow \mathbb{Z}_{t2}(\text{pt})]}_{\mathbb{Z}_{t2}[\mathbb{G}_m^{\wedge 1}]})$$

$$\mathbb{Z}(1)[2]$$

$$\mathbb{M}(\mathbb{P}^4)/\mathbb{M}(\text{pt})$$

Обозначение:

$$\mathbb{Z}(1) := C_* (\mathbb{Z}_{t2}[\mathbb{G}_m^{\wedge 1}] [-1])$$

$$C_* \left(\frac{\mathbb{Z}_{t2}(\mathbb{G}_m)}{\mathbb{Z}_{t2}(\text{pt})} \right) [-1]$$

$$\mathbb{Z}_{t2}(\text{pt})_{-1}$$

$$\mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m := \frac{\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m}{(\mathbb{G}_m \times \text{pt}) \vee (\text{pt} \times \mathbb{G}_m)}$$

$$\mathbb{Z}(2) := C_* (\mathbb{Z}_{t2}(\text{pt})_{-2}) [-2] = C_* \left(\frac{\mathbb{Z}_{t2}(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m)}{\mathbb{Z}_{t2}(\mathbb{G}_m \times \text{pt}) + \mathbb{Z}_{t2}(\text{pt} \times \mathbb{G}_m)} \right) [-2]$$

$$[\dots \rightarrow \bullet_{(2)} \rightarrow \bullet_{(1)} \rightarrow \bullet_{(0)} \rightarrow 0 \rightarrow 0]$$

Теорема 2

$$H^n(\text{Spec}(K), \mathbb{Z}(n)) = K_n^M(K)$$

$$\mathbb{G}_m(K) \times \mathbb{G}_m(K)$$

$$K^* \times K^*$$

$$\downarrow \text{— оевидное} \\ K_2^M(K)$$

Теорема 1

$\mathbb{Z}(1)$ квазиизоморфен комплексу $\mathbb{G}_m[-1]$

$$[\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots]$$

(1)

$$H_{Nis}^i(X, \mathbb{Z}(1)) = H_{Nis}^i(X, \mathbb{G}_m[-1]) = H_{Nis}^{i-1}(X, \mathbb{G}_m) = \begin{cases} k[X]^*, & i=1 \\ \text{Pic}(X), & i=2 \\ 0, & i \geq 3 \end{cases}$$

$$H_{Nis}^2(X, \mathbb{Z}(1)) = \text{Pic}(X)$$

$$H_{Nis}^1(X, \mathbb{Z}(1)) = k[X]^*$$

←
а не группа Брауэра,
как в étale топологии